284

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS XI

par

Patrick LAILLY

pour obtenir

le grade de Docteur-Ingénieur

spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Mention : ANALYSE NUMÉRIQUE

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE STOKES EN SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS NON CONFORMES

Soutenue le 20 mai 1976 devant la Commission d'examen

MM. TEMAM — Président
BOUJOT, CHAVENT, FORTIN — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548102_0012

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS XI

par

Patrick LAILLY

pour obtenir

le grade de Docteur-Ingénieur

spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Mention : ANALYSE NUMÉRIQUE

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE STOKES EN SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS NON CONFORMES

Soutenue le 20 mai 1976 devant la Commission d'examen

MM. TEMAM — Président
BOUJOT, CHAVENT, FORTIN — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je tiens à remercier tout particulièrement

- Monsieur LIONS pour m'avoir permis d'entreprendre ce travail en m'acceptant au sein de son équipe du LABORIA ;

- Monsieur TEMAM, qui m'a donné ce travail et qui l'a soutenu par ses encouragements et ses conseils, de me faire l'honneur de présider le jury ;

- Monsieur FORTIN pour ses nombreuses et fructueuses suggestions et Monsieur CHAVENT pour m'avoir accueilli dans son projet. Je les remercie également, ainsi que Monsieur BOUJOT, pour leur participation au jury.

- mes camarades du LABORIA et tout particulièrement J.HENRY et A.BAMBERGER pour leur aide amicale.

- Mademoiselle GUILLON qui a assumé avec une efficacité remarquable la dactylographie de ce document.

P L A N

Pages

- Introduction 1

- CHAPITRE 1 : Etude du problème continu

I - Préliminaires 3

II - Etude des espaces de Sobolev relatifs à la mesure r^{α} drdz 9

III - Un théorème de traces 30

IV - Etude des espaces de fonctions à divergence nulle 38

V - Existence et unicité de la solution du problème de Stokes 56

VI - Autre formulation du problème de l'équation radiale 59

- CHAPITRE 2 : Approximation du problème

I - La méthode des éléments finis non conformes 69

II - Approximation des espaces de Sobolev relatifs à la mesure r^{α} drdz par des éléments finis non conformes 79

III - Approximation du problème de Stokes en symétrie de révolution 108

IV - Discrétisation de la formulation variationnelle naturelle 118

V - Validité du schéma approché proposé 120

VI - Conclusions. 123

INTRODUCTION

On étudie ici le problème de la résolution numérique des équations de Stokes en coordonnées cylindriques décrivant l'écoulement d'un fluide possédant une symétrie de révolution. Les équations de Stokes sont en fait un modèle simplifié dans lequel on a éliminé les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes qui décrivent l'écoulement d'un fluide newtonien.

L'objet de ce travail a été de donner une formulation permettant une approximation variationnelle du problème. Plus précisement on a cherché à adapter la méthode des éléments finis non conformes - d'un emploi très commode pour la résolution des mêmes équations dans le cas des coordonnées cartésiennes- à notre problème.

Deux difficultés surviennent alors :

- la première vient du fait que les équations aux dérivées partielles à résoudre dégénèrent près de l'axe de révolution.

- la seconde, qui existait déjà dans le cas cartésien, consiste à trouver un espace d'éléments finis, à divergence (exprimée en coordonnées cylindriques) discrète nulle, suffisamment grand pour pouvoir approcher correctement la solution. C'est cette raison qui rend les éléments finis non conformes particulièrement adaptés à la résolution de ce type de problème.

La première difficulté a été surmontée grâce à un changement de fonction inconnue approprié dont le rôle est double :

- il permet de ramener le problème à un problème dégénéré de type classique dont l'étude théorique a déjà fait l'objet de plusieurs travaux ;

- la formulation variationnelle obtenue peut être discrétisée par une méthode d'éléments finis non conformes ce qui n'était pas possible avec la formulation variationnelle portant sur les inconnues initiales.

On voit donc que les difficultés portent sur la discrétisation en espace ; la discrétisation en temps se fait de manière classique : on n'abordera pas ce point de vue et on ne considérera que des équations stationnaires.

Dans un premier chapitre on étudie le problème continu en justifiant d'une part les conditions aux limites introduites sur l'axe de révolution pour tenir compte de la symétrie et d'autre part le changement fonction inconnue utilisé. Ce premier chapitre permet aussi d'introduire les outils fonctionnels qui seront utilisés au second chapitre.

Dans un second chapitre on s'intéresse au problème discret.

On montre d'abord que la méthode des éléments finis non conforr habituelle ne peut s'appliquer telle quelle à la résolution de ce genre de problème mais qu'il faut utiliser des noeuds adaptés à la nature du pro blème dégénéré à résoudre. On montre également que la formulation variatio nelle du problème de Stokes en symétrie de révolution ne peut être discr tisée sans avoir procédé, au préalable, au changement de fonction inconnue introduit au chapitre 1. On étudie l'approximation externe correspondant à la méthode de résolution proposée, en particulier on s'intéresse à l'erreur entre la solution exacte et la solution du problème approché, erreur qui sera du même ordre que dans le cas des coordonnées cartésiennes

CHAPITRE 1

ETUDE DU PROBLEME CONTINU

I - PRELIMINAIRES

Le mouvement du fluide est décrit par les équations de Stokes :

$$(1.1)\quad -\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial x}=f_x$$

$$(1.2)\quad -\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial y}=f_y$$

$$(1.3)\quad -\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial z}=f_z$$

$$(1.4)\quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{dy}+\frac{\partial u_z}{dx}=0$$

} dans C

Le domaine C est à symétrie de révolution

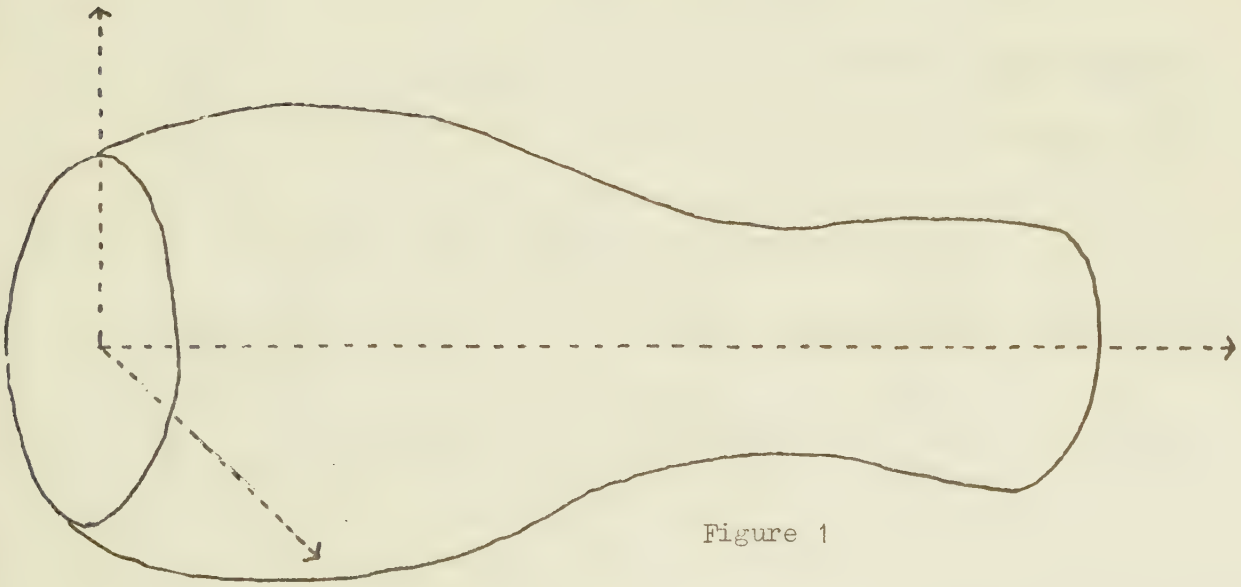


Figure 1

Il est caractérisé par l'équation de sa méridienne $r = R(z)$

On appelle ∂C la frontière de C

Conditions aux limites

(1.5) $\quad u_x = u_y = u_z = 0 \quad$ sur ∂C

Dans ces équations $\vec{u} = \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases}$ désigne la vitesse du fluide

p la pression

ρo la masse volumique (supposée constante)

ν le coefficient de viscosité cinématique (supposé constant)

$f = \begin{cases} f_x \\ f_y \\ f_z \end{cases}$ les forces extérieures exercées sur le fluide.

On va utiliser pour représenter le mouvement du fluide un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z).

De plus on suppose le mouvement du fluide à symétrie de révolution ; on a alors :

$$u_\theta = 0 \text{ et } \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

On peut ainsi se ramener à un problème bidimensionnel :

les équations (1.1.) et (1.2.) donnent

$$(1.6) \quad -\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial r} = f_r$$

l'équation (1.3.) devient :

$$(1.7) \quad -\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

dans Ω

et (1.4) :

$$(1.8)\quad \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

où Ω désigne le domaine de R^2 :

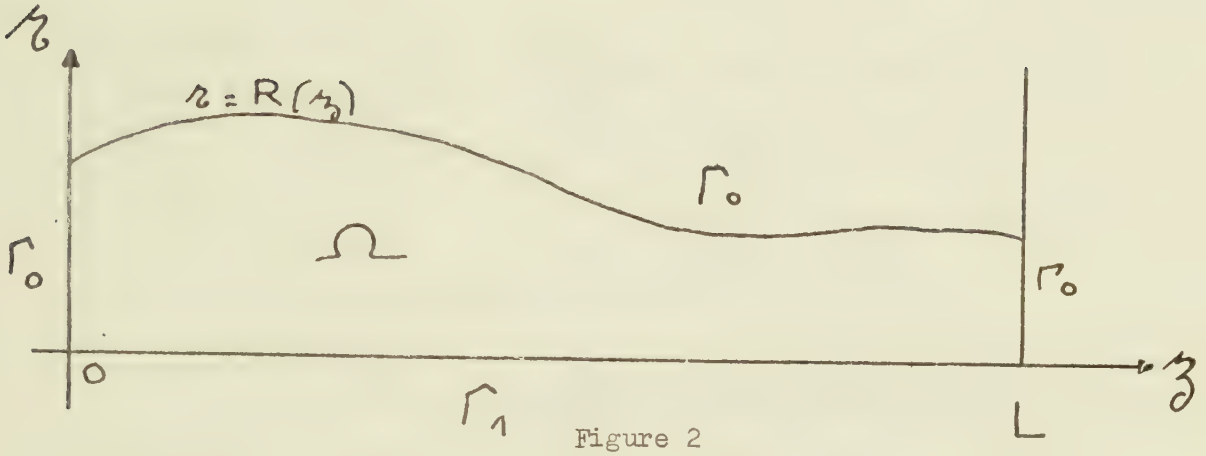


Figure 2

Le domaine Ω est alors défini par l'équation de sa méridienne $r = R(z)$. <u>On supposera dans la suite que</u>

$$(1.9)\qquad \beta_2 > R(z) > \beta_1 > 0 \qquad \forall\, z \in]0,L[$$

Soit Γ la frontière de Ω ; $\Gamma_o = \Gamma \cap \{r/r > 0\}$ et $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{r/r = 0\}$

Les conditions aux limites (1.5) deviennent :

$$(1.10)\qquad u_r = u_z = 0 \text{ sur } \Gamma_o$$

De plus, il faut rajouter une condition aux limites pour exprimer en $r = 0$ la symétrie de révolution :

$$(1.11)\qquad u_r = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

Il s'agit donc de résoudre le problème aux limites (1.6),(1.7),(1.8), (1.10), (1.11) :

$$\left\{\begin{array}{l} -\nu \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} - \dfrac{u_r}{r^2} + \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \dfrac{1}{\rho o}\dfrac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ -\nu \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{\rho o}\dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array}\right. \quad \text{dans } \Omega$$

Conditions aux limites

$u_r = 0$ sur Γ

$u_z = 0$ sur Γ_o

1.1 Etude de l'équation longitudinale

On suppose ici la pression connue et on inclus $\frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial z}$ dans le terme f_z :

$$-\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = f_z \quad \text{dans } \Omega$$

qui s'écrit encore :

$$(1.12) \qquad -\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = r f_z \quad \text{dans } \Omega$$

avec, comme condition aux limites :

$$(1.13) \qquad u_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o$$

Formulation variationnelle

On multiplie (1.12) par une fonction v_z nulle sur Γ_o et on intègre sur Ω :

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) v_z \, dr\,dz = \int_\Omega r f_z v_z \, dr\,dz$$

En appliquant la formule de Green (on suppose que les fonctions u_z et v_z sont suffisamment régulières), il vient :

$$(1.14)\quad \int_\Omega r\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)drdz=\int_\Omega r\, f_z\, v_z\, drdz$$

1.2 Etude de l'équation radiale

De même on suppose encore la pression connue et on inclus $\frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial r}$ dans le terme f_r.

Il s'agit alors de résoudre :

$$(1.15)\quad -\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{u_r}{r^2}=f_r \quad \text{dans} \quad \Omega$$

$$(1.16)\quad u_r=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

On fait le changement de fonction inconnue :

$$(1.17)\quad u_o=\frac{u_r}{r}$$

u_s sera alors inconnu sur Γ_1

Alors :

$$(1.18)\quad \frac{\partial u_r}{\partial r}=u_s+r\frac{\partial u_s}{\partial r}$$

$$(1.19)\quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}=2\frac{\partial u_s}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2}$$

En reportant (1.18) (1.19) dans (1.15) il vient :

$$(1.20)\quad -r\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2}-3\frac{\partial u_s}{\partial r}-r\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}=f_r$$

D'où le problème aux limites pour u_s

$$(1.21)\quad -\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial u_s}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r^3\frac{\partial u_s}{\partial z}\right) = r^2 f_r \qquad \text{dans } \Omega$$

$$(1.22)\quad u_o = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_o$$

■

Formulation variationnelle

Multiplions (1.21) par une fonction v_o nulle sur Γ_o et intégrons sur Ω.

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial u_s}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^3\frac{\partial u_s}{\partial z}\right) v_s \, drdz = \int_\Omega r^2 f_r v_s \, drdz$$

En appliquant la formule de Green (on suppose les fonctions u_s et v_s suffisamment régulières), il vient :

$$(1.23)\qquad \int_\Omega r^3\left(\frac{\partial u_s}{\partial r}\frac{\partial v_s}{\partial r} + \frac{\partial u_s}{\partial z}\frac{\partial v_s}{\partial z}\right) drdz = \int_\Omega r^2 f_r v_s \, drdz$$

■

On a donc ramené le problème aux limites relatif à l'équation radiale à un problème du même type que celui de l'équation longitudinale. Ces problèmes appartiennent à la classe des problèmes elliptiques dégénérés correspondant à des opérateurs du type

$-\frac{\partial}{\partial r}(\varphi^\alpha\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi^\alpha\frac{\partial}{\partial z})$ ou φ est une fonction qui s'annule sur une partie de la frontière. Ces problèmes ont fait l'objet de plusieurs études ; cf. en particulier BAOUENDI [1], BAOUENDI-GOULAOUIC [2], ZUILY [18].

Afin d'obtenir des théorèmes d'existence et d'unicité et de rendre licite le changement de fonction inconnue $u_s = \frac{u_r}{r}$ ainsi que les calculs formels précédents on va s'intéresser aux problèmes (P) du type suivant :

Ω étant u domaine de R^2 du type de celui de la figure 2 et $\alpha \geq 1$ trouver un vérifiant :

$$(P) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}) = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{avec, comme condition aux limites :} \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_o \end{cases}$$

La forme bilinéaire $a(u,v)$ de la formulation variationnelle associée à ce problème sera coercive sur un espace de Sobolev relatif à la mesure r^α drdz (espace de Sobolev avec poids).

II - ETUDE DES ESPACES DE SOBOLEV RELATIFS A LA MESURE r^α drdz

On se limitera à une étude restreinte dont l'objet est l'établissement des principaux théorèmes nous permettant d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (P) en reprenant les méthodes utilisées dans LIONS [10].

Pour une étude plus générale voir BAOUENDI-GOULAOUIC [2], GRISVARD [8], MOREL [11], NECAS [12], ZUILY [18].

2.1 Définitions et premières propriétés

Définissons d'abord un espace :

$$(2.1) \quad \begin{cases} H_\alpha = \left\{ v \text{ mesurables et telles que} \int_\Omega r^\alpha v^2 \, drdz \text{ existe} \right\} \\ \text{On muni cet espace du produit scalaire } (u,v)_\alpha = \int_\Omega r^\alpha uv \, drdz \end{cases}$$

Ainsi H_α est un espace de Hilbert (il est complet d'après le théorème de Fischer-Riesz). De plus H_α est séparable.

■

Proposition 2.1 - $\mathcal{D}(\Omega)$ est inclus et dense dans H_α et l'injection canonique de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans H_α est continue. (On muni $\mathcal{D}(\Omega)$ de sa topologie habituelle ; cf. SCHWARTZ [13]).

Le seul point non trivial est la densité.

Soit $y \in H_\alpha$. On va montrer que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (y - \Phi)^2 \, r^\alpha \, dr dz < \varepsilon$$

Si $y \in H_\alpha$, $r^{\frac{\alpha}{2}} y \in L^2(\Omega)$. Donc il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (r^{\frac{\alpha}{2}} y - \varphi)^2 \, dr dz < \varepsilon \qquad \text{ou encore}$$

$\frac{\varphi}{r^{\frac{\alpha}{2}}}$ étant le produit d'une fonction de $C^\infty(\Omega)$ par une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$.

D'où la proposition avec $\Phi = \frac{\varphi}{r^{\frac{\alpha}{2}}}$ ∎

H_α et H'_α sont isomorphes par :

$$(2.2) \qquad u \in H_\alpha \xrightarrow{\mathcal{J}_\alpha} r^\alpha u \in H'_\alpha = H_{-\alpha}$$

On a donc :

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_\alpha \overset{\mathcal{J}_\alpha}{\leftrightarrow} H'_\alpha \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

(2.3) Définissons maintenant un espace $V_\alpha = \left\{ v \in H_\alpha \text{ tels que } \frac{\partial v}{\partial r} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial z} \in H_\alpha \right.$

On muni cet espace du produit scalaire

$$(2.4) \qquad ((u,v))_\alpha = (u,v)_\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r}\right)_\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)_\alpha$$

Proposition 2.2 - L'espace V_α muni du produit scalaire $((\ ,\ ))_\alpha$ est un espace de HILBERT.

(2.5) On définit maintenant l'espace V_α comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{V}_\alpha$

Proposition 2.3 - L'espace V_α est un espace de HILBERT pour le produit scalaire $((\ , \ ))_\alpha$. De plus V_α est séparable.

On est donc dans le cadre $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow V_\alpha \hookrightarrow H_\alpha \overset{\mathcal{J}\alpha}{\leftrightarrow} H'_\alpha \hookrightarrow V'_\alpha \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.
où $\mathcal{J}\alpha$ est défini en (2.2)
On suppose dans la suite $\alpha \geq 1$ (sauf mention explicite du contraire).

Proposition 2.4 - $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{V}_\alpha$

La démonstration fait l'objet des trois lemmes suivants. Elle reprend celle de GRISVARD [8] en utilisant pour le lemme 2-3 les techniques de HORMANDER [9] ou TEMAM [14].

Lemme 2-1 Les fonctions de $L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{V}_\alpha$ forment un sous espace dense dans $\mathcal{V}_\alpha$ (α quelconque).

Soit $u \in \mathcal{V}_\alpha$

Définissons $u_k(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in \Omega_k = \left\{ x \in \Omega \ / \ |u(x)| \leq k \right\} \\ k \quad \text{si } u(x) \geq k \\ -k \quad \text{si } u(x) \leq -k \end{cases}$

Il résulte alors de DENY-LIONS [6] (lemme 3.3 chapitre 1) que

$$\frac{\partial u_k}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{si } x \in \Omega_k$$

$$= 0 \quad \text{si } x \in \Omega - \Omega_k$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{si } x \in \Omega_k$$

$$= 0 \quad \text{si } x \in \Omega - \Omega_k$$

Donc $u_k \in \mathcal{V}_\alpha$ et $||u_k||_\alpha \leq ||u||_\alpha$

On va appliquer le théorème de Lebesque :

On a :

$$|u_k - u|^2(x) \leq 4|u|^2(x)$$

et $u_k(x) - u(x) \to 0$ presque partout

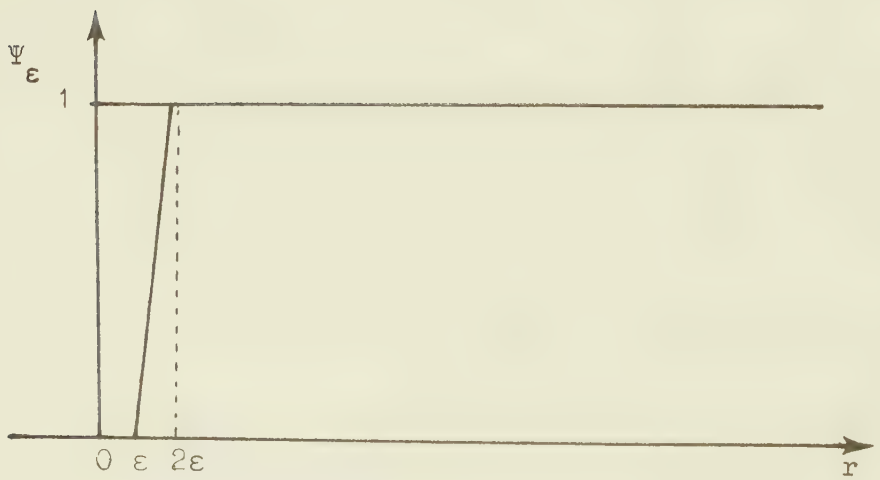
Donc $u_k - u \to 0$ dans H_α

De même $\frac{\partial u_k}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}$ tendent vers 0 dans H_α

Donc $u_k \to u$ dans V_α

Lemme 2.2 Les fonctions de $L^\infty(\Omega) \cap V_\alpha$ nulles au voisinage de $r = 0$ forment un sous espace $\mathcal{S}$ dense dans $L^\infty(\Omega) \cap V_\alpha$ muni de la topologie de V_a $(\alpha \geq 1)$

On définit la fonction de troncature $\psi_\varepsilon(r)$:



Soit $u \in L^\infty(\Omega) \cap V_\alpha$. On construit la suite $\psi_\varepsilon u$, $\varepsilon \to 0$.

$$\psi_\varepsilon u \in H_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}(\psi_\varepsilon u) = \psi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \in H_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\psi_\varepsilon u) = \psi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} + \psi'_\varepsilon u \in H_\alpha$$

D'autre part : $|u - \psi_\varepsilon u|^2(x) \leq u^2(x)$

et $\psi_\varepsilon u - u \to 0$ presque partout.

Donc, d'après le théorème de Lebesgue,

$$\int_\Omega (\psi_\varepsilon u - u)^2 r^\alpha \, dr \, dz \to 0 \text{ et } \psi_\varepsilon u \to u \text{ dans } H_\alpha$$

De même pour $\frac{\partial}{\partial z}(\psi_\varepsilon u)$ et $\psi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}$.

Il reste à montrer que $\psi'_\varepsilon u \to 0$ dans H_α

$$\int_\Omega u^2 \psi'^2_\varepsilon r^\alpha \, dr dz = \int_0^L \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{u^2}{\varepsilon^2} r^\alpha \, dr dz$$

$$\leq ||u||^2_{L^\infty(\Omega)} L \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{r^\alpha dr}{\varepsilon^2}$$

$$\leq ||u||^2_{L^\infty(\Omega)} \frac{L}{\alpha+1} \varepsilon^{\alpha-1} [2^{\alpha+1} - 1]$$

qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ si $\alpha > 1$

Si $\alpha = 1$ $\psi'_\varepsilon u$ reste dans un borné de H_α

Donc il existe une sous suite ψ'_{ε_i} et $v \in H_\alpha$ tels que :

$$\psi'_{\varepsilon_i} u \to v \text{ dans } H_\alpha \text{ faible quand } \varepsilon_i \to 0$$

D'autre part $\psi'_{\varepsilon_i} u \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet :

$$< \psi'_{\varepsilon_i} u, \varphi > = \int_\Omega \psi'_{\varepsilon_i} u \, \varphi \, dr dz$$

$$| < \psi'_{\varepsilon_i} u, \varphi > | \leq ||u||_{L^\infty(\Omega)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^L \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \varphi \, dr dz$$

si $r \in]0,2\varepsilon[$ $\exists \xi \in]0,2\varepsilon[$ tel que

$$\varphi(r,z) = \varphi(0,z) + r \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\xi,z) = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\xi,z)$$

Soit $M_\varphi = \sup \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\xi,z)$ $\xi \in]0,2\varepsilon[$ $z \in]0,L[$

$$| < \psi'_{\varepsilon_i} u, \varphi > | \leq ||u||_{L^\infty(\Omega)} LM_\varphi \frac{\varepsilon}{2}(2^2 - 1^2)$$

qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$

Donc $v = 0$ et $\psi_\varepsilon u \to u$ dans $\mathcal{V}_\alpha$ faible.

Donc l'espace $\mathcal{S}$ est dense faiblement donc fortement (théorème de Mazur) dans $L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{V}_\alpha$ muni de la topologie de $\mathcal{V}_\alpha$

Lemme 2-3 L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{S}$ muni de la topologie de $\mathcal{V}_\alpha$. $(\alpha \geq 1)$

Soit $u \in \mathcal{S}$. Montrons qu'il existe une suite u_ε qui tend vers u pour la topologie de $\mathcal{V}_\alpha$.

1°/ Considérons tout d'abord le cas où u est à support compact K assez petit pour que la condition suivante soit réalisée :

$$(H) \quad \begin{cases} K \subset \bar{\Omega} \\ \text{Il existe un ensemble convexe ouvert } C \text{ tel que } 0 \in \bar{C} \text{ et} \\ \text{pour tout } x \in K \cap \Gamma \quad x + C \subset \subset_{\bar{\Omega}} \end{cases}$$

Soit $\tilde{u} = u$ dans Ω

0 hors de Ω

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial r}} + \mu_r$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial z}} + \mu_z$$

où μ_r et μ_z sont des distributions à support dans $K \cap \Gamma$.

Soient :

- $\rho \in \mathcal{D}(R^2)$ à support inclus dans $C, \rho \geq 0 \int_{R^2} \rho(x)\, dx = 1$
- $\varepsilon \in]0,1]$ et $\rho_\varepsilon : x \to \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho(\frac{x}{\varepsilon})$

ρ_ε a son support dans C puisque C est convexe.

$\rho_\varepsilon * \tilde{u} \in \mathcal{D}(R^2)$ et sa restriction u_ε à $\Omega \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{S}$

On va montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans V_α quand $\varepsilon \to 0$.

$\rho_\varepsilon \to \delta(o)$ dans $\mathcal{D}'(R^2)$ et, pour tout $v \in L^2(R^2)$, $\rho_\varepsilon * v \to v$ dans $L^2(R^2)$.

Ainsi $\rho_\varepsilon * \tilde{u} \to \tilde{u}$ dans $L^2(R^2)$ et, sur Ω, $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(\Omega)$

D'autre part, $\rho_\varepsilon * D\tilde{u}$ $\rho_\varepsilon * D u + \rho_\varepsilon * \mu$

où $D = \frac{\partial}{\partial r}$ (resp $\frac{\partial}{\partial z}$) et $\mu = \mu_r$ (resp. μ_z).

ρ_ε a son support inclus dans C, $\rho_\varepsilon * \mu$ a son support dans $\subset_\Omega$;

alors : $D u_\varepsilon = (\rho_\varepsilon * D \tilde{u})|_\Omega = (\rho_\varepsilon * \widetilde{D u})|_\Omega$

Donc $D u_\varepsilon \to D u$ dans $L^2(\Omega)$.

Alors $u_\varepsilon \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et $u_\varepsilon \to u$ dans V_α.

■

2°/ Cas général

Montrons que l'on peut se ramener au cas où la condition (H) est vérifiée.

On effectue un recouvrement localement fini de $\bar{\Omega}$ (fig.3)

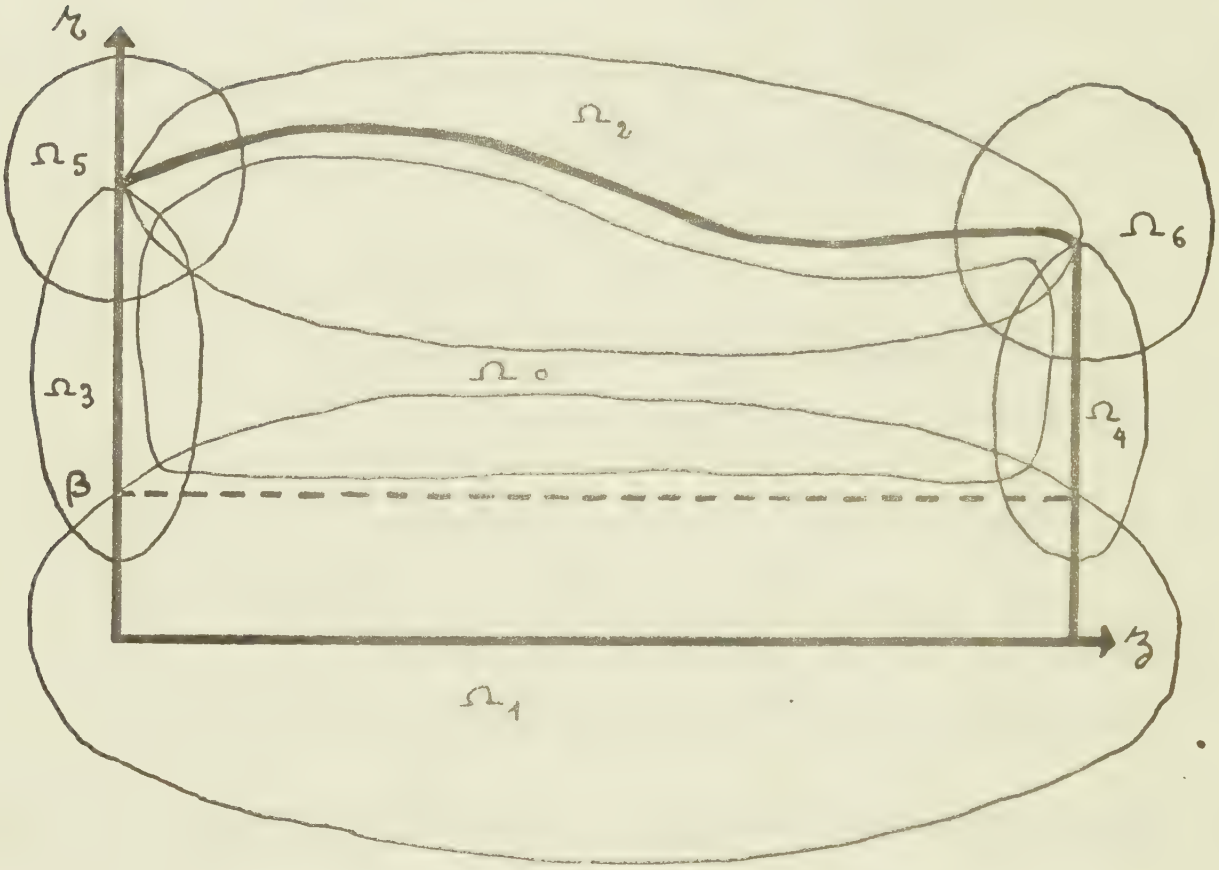


Figure 3

$u(x) = 0$ pour $x < \beta$

Par partition de l'unité on peut décomposer u :

$u = \sum_{i=0}^{6} u_i$ où $u_i \in V_\alpha$ et est à support dans Ω_i

u_i vérifie bien la condition (H) et il existe une suite $u_{\varepsilon_i} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{S}$

qui converge vers u_i dans V_α.

Alors $u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{6} u_{\varepsilon_i}$ converge vers u dans V_α.

2.2 Etude des traces de fonctions de $\mathcal{V}_\alpha$

Proposition 2.5 - Soit $\mathcal{O} = \{(z,r) \in R^2 / r > 0\}$ alors $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $\mathcal{V}_\alpha$ si $\alpha \geq 1$. (démonstration dans GRISVARD [5]).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. Considérons l'application qui a φ associe $\varphi(r,0) \in L^2(\partial\mathcal{O})$. Elle n'est pas continue ; car si elle était continue sur $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ muni de la topologie de $\mathcal{V}_\alpha$ on pourrait la prolonger à $\mathcal{V}_\alpha$ et toutes les fonctions de $\mathcal{V}_\alpha$ auraient une trace nulle pour $r = 0$.

Or la fonction égale à 1 pour $r^2 + z^2 < A$ et convenablement tronquée au delà appartient à $\mathcal{V}_\alpha$ et sa trace sur $r = 0$ est non nulle.

On voit donc qu'il n'est pas possible de définir la trace sur $r = 0$ de fonctions de $\mathcal{V}_\alpha$.

Proposition 2.6 - On peut définir les traces sur Γ_o des fonctions de $\mathcal{V}_\alpha$ (définies sur le rectangle Ω) dans les espaces suivants :

1) en $z = 0$ la trace est définie dans $L^2_{r^\alpha dr}(]0,R(o)[)$

2) en $z = L$ la trace est définie dans $L^2_{r^\alpha dr}(]0,R(L)[)$

3) sur le bord supérieur Γ_2 de Ω (méridienne) la trace est définie dans $L^2(\Gamma_2)$ et même dans $H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\Gamma_2)$ si

$$R(z) > \beta > 0 \qquad \forall z \in]0L[$$

De plus l'opérateur trace est linéaire et continue de $\mathcal{V}_\alpha$ dans ces espaces.

0/ De la même manière que pour les fonctions définies sur le demi-espace ont ne peut définir la trace de fonction de $\mathcal{V}_\alpha$ en $r = 0$

1/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{S}$

Considérons l'application : $\varphi \to \varphi(r,0) \in L^2_{r^\alpha dr}(]0,R|)$

Elle est linéaire (évident) et continue pour la topologie de $\mathcal{V}_\alpha$:

$$\varphi^2(0,r) - \varphi^2(z,r) = -2\int_0^z \varphi(\xi,r)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi,r)\,d\xi \qquad 0 < z < L$$

$$\int_0^{R(o)} r^\alpha \varphi^2(0,r)\,dr \le \int_0^{R(o)}\int_0^z r^\alpha \varphi^2(\xi,r)\,dr d\xi + \int_0^{R(o)}\int_0^z r^\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi,r)\right) dr d\xi + \int_0^{R(o)} r^\alpha \varphi^2(z,r)dr$$

Intégrons de $z = 0$ à L :

$$L\int_0^{R(o)} r^\alpha \varphi^2(0,r)\,dr \le (1+L)||\varphi||_\alpha^2$$

On peut donc prolonger cette application à V_α (puisque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})\cap_{\mathcal{S}}$ est dense dans V_α et définir ainsi sur V_α une application trace en $z = 0$ linéaire et continue de V_α dans $L^2_{r^\alpha dr}(]0,R(o)[)$

2/ On définit de même la trace en $z = L$

3/ Quant à la trace sur Γ_2 elle est définie dans $H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\Gamma_2)$ puisque les fonctions de V_α appartiennent à H^1 pour $r > \beta_1 > 0$.

<u>Proposition 2.7</u> - L'espace V_α est l'espace des fonctions de V_α nulles sur Γ_o

a) si $u \in V_\alpha$ alors u est la limite dans V_α de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui ont une trace nulle sur Γ_o. Par continuité u aura une trace nulle sur Γ_o.

b) soit $\cup \in V_\alpha$ et tel que sa trace sur Γ_o soit nulle.

On va montrer que $\cup$ est limite dans V_α de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$.

i.e. $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $||\cup - \varphi||_\alpha < \varepsilon$.

D'après les lemmes 2-1 et 2-2 précédents il existe $u \in L^\infty(\Omega) \cap V$ nulle au voisinage de $r = 0$ tel que $||\mathcal{L} u||_\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$.

On prolonge u par 0 hors de Ω. Soit $\tilde{u}$ ce prolongement.

Soit $\Phi \in \mathcal{D}(R^2)$ et φ sa restriction à Ω.

Alors :

$$\int_\Omega (u\, D\, \varphi + (D\, u)\varphi)\, drdz = 0$$ (cette intégrale est définie car $u \in H^1(\Omega)$).

Donc :

$$\int_{R^2} (\tilde{u}\, D\, \Phi + \widetilde{(Du)}\Phi)\, drdz = 0 \qquad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(R^2)$$

et $D\,\tilde{u} = \widetilde{D\,u}$ $\qquad (D = \frac{\partial}{\partial r}$ ou $\frac{\partial}{\partial z})$

Comme dans le cas du lemme 2.3 précédent on se ramène au cas d'une fonction u à support K assez petit pour que la condition suivante soit réalisée :

Il existe un ensemble convexe ouvert C tel que $0 \in C$ et $K - C \subset \Omega$

Soit ρ et ρ_ε comme au lemme 2.3 et soit $\overset{v}{\rho}_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(-x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho(-\frac{x}{\varepsilon})$

On vérifie alors, comme au lemme 2.3, que $\overset{v}{\rho}_\varepsilon * u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et converge vers u dans V_α quand $\varepsilon \to 0$.

Proposition 2.8

(2.6) On désigne par T_α l'espace des traces de fonctions de V_α.

(2.7) On va munir T_α de la norme $||\tilde{\varphi}||_{T_\alpha} = \inf_{\substack{\varphi \in V_\alpha \\ \gamma\varphi = \tilde{\varphi}}} ||\varphi||_\alpha$

L'espace T_α est alors un espace de Banach.

Le résultat de cette proposition s'obtient directement par application du théorème suivant.

Théorème 2.1

Soient E et F deux espaces de Banach réflexifs

f une application linéaire continue de F dans E.

Alors on peut définir sur F une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par $u \mathcal{R} v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$ et définir ainsi un espace quotient $F/\mathcal{R}$ qui sera un espace de Banach pour la norme $||u||_{F/\mathcal{R}} = \inf_{\substack{v \in F \\ f(v) = f(u)}} ||v||_F$

De plus, si $f(F)$ est fermé dans E pour tout $u \in F/\mathcal{R}$ il existera $v \in F$ tel que $v \in u$ et $||v||_F = ||u||_{F/\mathcal{R}}$.

■

Ici f, F, E sont respectivement :

$$\gamma, \quad V_\alpha, \quad L^2(]0, R(0)[) \times L^2(]0, R(L)[) \times L^2(\Gamma_2)$$

■

Proposition 2.9

L'opérateur trace γ est continu de V_α sur T_α et il existe un opérateur γ' (relèvement) continu de T_α dans V_α tel que $\gamma \gamma' = I$

Ce résultat découle également du théorème 2.1.

Proposition 2.10 Si $v \in V_\alpha$

$$(2.8) \qquad \int_\Omega r^\alpha v^2 \, dr dz \leq C \int_\Omega r^\alpha \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dr dz$$

(inégalité de Poincaré)

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_0^{R(z)} r^\alpha \varphi^2(z,r) = 2\int_0^{R(z)} r^\alpha \int_0^z \varphi(\xi,r)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi,r)\,d\xi\,dr$$

$$\leq 2\left(\int_\Omega r^\alpha \varphi^2\,drdz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega r^\alpha (\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2 drdz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_\Omega r^\alpha \varphi^2\,drdz \leq 2L\left(\int_\Omega r^\alpha \varphi^2\,drdz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega r^\alpha (\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2\,drdz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_\Omega r^\alpha \varphi^2\,drdz \leq 4L^2\int_\Omega r^\alpha (\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2\,drdz$$

d'où :

$$\int_\Omega r^\alpha \varphi^2\,drdz \leq 4L^2\int_\Omega r^\alpha\left[(\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial r})^2\right]drdz$$

Ceci reste valable pour tout $\varphi \in V_\alpha$ puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V_α.

On peut donc munir V_α d'une norme :

(2.9) $\quad ||\varphi|| = \left[\int_\Omega r^\alpha \left[(\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial r})^2\right]drdz\right]^{\frac{1}{2}}$ équivalente à la norme $||\varphi||_\alpha$

2.3 Existence et unicité de la solution du problème (P)

Proposition 2.11 : Le problème (P) admet une solution unique.

Il résulte des propositions précédentes que la forme bilinéaire :

(2.10) $\quad a(u,v) = \int_\Omega r^\alpha (\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})\,drdz$ est continue et coercive sur V_α ; donc le problème variationnel :

(2.11) $\quad \begin{cases} \text{trouver } u \in V_\alpha \text{ tel que} \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle_{\langle V'_\alpha, V_\alpha\rangle} \end{cases} \quad \forall\, v \in V_\alpha$ (f étant donné dans V'_α)

admet une solution unique.

(2.12) Par conséquent il existe un isomorphisme $\tilde{A} : u \in V_\alpha \to f \in V'_\alpha$ ■

Interprétation de l'opérateur $\tilde{A}$

On va expliciter $\tilde{A}u$ en tant que distribution (V'_α est un espace de distributions)

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \tilde{A}u, \varphi \rangle = \int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \, drdz$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}) \right) \varphi \, drdz$$

$$= \langle - \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}), \varphi \rangle$$

$\tilde{A}$ est donc l'opérateur :

(2.13) $$u \in V_\alpha \to \tilde{A}u = - \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}) \in V'_\alpha$$

De plus il y a équivalence entre le problème variationnel et le problème (P) (f étant donné dans V'_α).

On trouvera dans ZUILY [18] une étude de la régularité du problème (P).

Caractérisation des éléments de $\mathcal{V}'_\alpha$ et de V'_α

Proposition 2.12 : Soit $L \in \mathcal{V}'_\alpha$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}_\alpha$.

Alors il existe $f_0, f_1, f_2 \in H_\alpha$ telles que :

(2.14) $$L(u) = \int_\Omega r^\alpha (f_0 u + f_1 \frac{\partial u}{\partial r} + f_2 \frac{\partial u}{\partial z}) \, drdz \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{V}_\alpha$$

Cette décomposition n'est pas unique.

Démonstration

On considère V_α comme un sous espace (fermé) de $(H_\alpha)^3$ ce qui est possible grâce à l'injection continue :

$$u \in V_\alpha \rightarrow (u, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial z}) \in (H_\alpha)^3$$

Alors L est une forme linéaire continue sur un sous-espace d'un espace de Hilbert. On peut donc l'étendre grâce au théorème de Hahn Banach, de façon non unique, à $(H_\alpha)^3$ tout entier. Il existe donc $\tilde{L} \in (H_\alpha)^3$ telle que $\tilde{L}(u) = L(u) \quad \forall u \in V_\alpha$.

D'où le résultat en identifiant H_α à son dual par le théorème de Riesz.

■

Proposition 2.13

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution T sur Ω soit dans V'_α est qu'on puisse écrire :

$$(2.15) \qquad T = \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha g_1) + \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha g_2) + r^\alpha g_o \quad \text{où} \quad g_o, g_1, g_2 \in H_\alpha$$

Cette décomposition n'est pas unique.

Démonstration

Condition suffisante. Si T peut s'écrire sous la forme ci dessus, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$< T, \varphi > = \int_\Omega r^\alpha (g_o \varphi - g_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - g_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \, r dr dz$$

L'application $\varphi \rightarrow < T, \varphi >$ est donc continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de V_α. On peut donc la prolonger (de façon unique) par le théorème de Hahn Banach à V_α entier et $T \in V'_\alpha$.

■

Condition nécessaire

Soit $T \in V'_\alpha$. Par le théorème de Hahn Banach T se prolonge (de façon non unique) à $\mathcal{V}_\alpha$. Donc T est de la forme indiquée par le proposition précédente :

Il existe $f_o, f_1, f_2 \in H_\alpha$ non uniques tels que :

$$T(u) = \int_\Omega r^\alpha (f_o u + f_1 \frac{\partial u}{\partial r} + f_2 \frac{\partial u}{\partial z})\, drdz \qquad \forall\, u \in \mathcal{V}_\alpha$$

Prenons en particulier $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$T(u) = < r^\alpha f_o - \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha f_1) - \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha f_2),\ u > \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Donc la restriction de T à $\mathcal{D}(\Omega)$ est la distribution :

$$r^\alpha f_o - \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha f_1) - \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha f_2) \text{ d'où le résultat.}$$

■

Nous avons terminé l'étude qui nous a permis d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (P) (problème de Dirichlet avec poids). Nous allons maintenant donner quelques résultats complémentaires concernant le problème de Neumann avec poids, résultats qui seront utilisés par la suite.

2.4 Problèmes de Neumann avec poids.

Proposition 2.14 (théorème de traces)

Soit S_α l'espace des $u \in \mathcal{V}_\alpha$ tels que

$$(2.16) \qquad -\frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}) \in L^2_{r^\alpha}\, drdz$$

que l'on munit de la topologie produit (S_α est alors un espace de Hilbert).

Alors il existe un opérateur continu de S_α dans T'_α

$$\text{(noté } \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}}\text{) tel que } \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\Gamma_o} = \left.\begin{pmatrix} r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r} \\ r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}\right|_{\Gamma_o} \text{ quand } u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

($\vec{\nu}$ est la normale extérieure à Γ_0).

De plus, on a, pour tout $u \in S_\alpha$ et $v \in V_\alpha$

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) v \, dr dz = \int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz$$

$$(2.17) \qquad - \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}, \gamma v \right\rangle_{\Gamma'_\alpha, \Gamma_\alpha}$$

Démonstration

Soit $\varphi \in T_\alpha$ et $v \in V_\alpha$ tel que $\gamma v = \varphi$

On considère l'expression :

$$(2.18) \quad X_u(\varphi) = \int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) v dr dz$$

Cette expression a bien un sens pour $u \in S_\alpha$ et $v \in V_\alpha$.

De plus elle est indépendante du choix de v :

Soit v_1 et $v_2 \in V_\alpha$ tels que $\gamma v_1 = \gamma v_2 = \varphi$

Alors $v = v_1 - v_2 \in V_\alpha$. Donc il existe $v_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers v dans V_α et

$$\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v_n}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v_n}{\partial z}\right) dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) v_n \, dr dz = 0$$

quel que soit n. Donc, à la limite :

$$\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) v \, dr dz = 0$$

et $X_u(\varphi)$ ne dépend pas du choix de v.

De (2.18) on obtient en appliquant l'inégalité de Schwartz et le théorème de traces (proposition 2.9)

$$| X_u(\varphi) | \leq ||u||_{S_\alpha} \; ||v||_{\gamma_\alpha} \leq C ||u||_{S_\alpha} \; ||\varphi||_{T_\alpha}$$

Donc X_u est un opérateur linéaire continu de T_α dans R.

Il existe donc $g_u \in T'_\alpha$ tel que $X_u(\varphi) = \underset{< T'_\alpha , T_\alpha >}{< g_u, \varphi >}$

De plus $||g_u||_{T'_\alpha} \leq C ||u||_{S_\alpha}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \vec{\nu}} : u \to g_u$ est un opérateur linéaire continu de S_α dans T'_α .

On a alors :

$$\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) v \, dr dz$$

$$= \underset{< T'_\alpha, T_\alpha >}{< \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} , v >}$$

Il reste à montrer que $\dfrac{\partial}{\partial \vec{\nu}}$ prolonge $u \to \begin{pmatrix} r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ r^\alpha \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} . \vec{\nu}$

pour $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

Soit $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Alors :

$$X_u(\gamma v) = \int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) v \, dr dz$$

$$= \int_{\Gamma_0} \begin{pmatrix} r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} . \vec{\nu} \; v \; d\Gamma \quad \text{(formule de Green)}$$

$$= \underset{< T'_\alpha , T_\alpha >}{< \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} , \gamma v >} \quad \text{(définition de } \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} \text{)}$$

ceci pour tout $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Par continuité on a encore :

$$X_u(\varphi) = \langle r^\alpha \vec{\text{grad}}\, u . \vec{\nu}, \varphi \rangle_{\langle T'_\alpha, T_\alpha \rangle} \quad \forall \varphi \in T_\alpha$$

Donc $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \begin{pmatrix} r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} . \vec{\nu}$ quand $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

On peut maintenant s'intéresser au problème (P') (problème de Neumann avec poids) :

f et g étant donnés respectivement dans H_α et T'_α trouver $u \in V_\alpha$

vérifiant :

$$(P') \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial r}) - \dfrac{\partial}{\partial z}(r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial z}) = r^\alpha f \quad \text{dans } \Omega \\ \begin{pmatrix} r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ r^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} . \vec{\nu} = g \text{ sur } \Gamma_o \end{cases}$$

Proposition (2.15)

Le problème (P') admet une solution unique à une constante additive près si

$$(2.19) \quad \int_\Omega r^\alpha f \, dr dz + \langle g, 1 \rangle_{\langle T'_\alpha, T_\alpha \rangle} = 0$$

Démonstration

Associons au problème (P') le problème variationnel :

$$(2.20)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_\alpha \text{ tel que} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr\,dz = \int_\Omega r^\alpha f\, v\, dr\,dz + \underset{<T'_\alpha, T_\alpha>}{<g, \gamma v>} \quad \forall\, v \in V_\alpha \end{array} \right.$$

Montrons d'abord que, si l"on a (2.19), ce problème admet une solution unique à une constante additive près.

Définissons :

$$(2.21)\qquad a(u,v) = \int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr\,dz$$

$a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace V_α/R.

Il reste donc à vérifier que :

$$v \in V_\alpha/R \rightarrow \int_\Omega r^\alpha f\, v\, dr\,dz + \underset{<T'_\alpha\ ,\ T_\alpha>}{<g,\ \gamma\ v>}$$

est une forme linéaire continue.

Ceci est encore équivalent à vérifier que

$$\int_\Omega r^\alpha f\, \varphi\, dr\,dz + \underset{<T'_\alpha\ ,\ T_\alpha>}{<g,\ \varphi>} = 0 \quad \forall \varphi \in R$$

ce qui est encore équivalent à la condition (2.19)

Il reste donc à montrer l'équivalence du problème (P') et du problème variationnel (2.20)

Si $u \in V_\alpha$ est solution du problème (P') alors $u \in S_\alpha$ et d'après la proposition 2.14 :

$$\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz = \int_\Omega r^\alpha f\, v\, dr dz + \underset{<T'_\alpha , T_\alpha>}{<g, \gamma v>} \qquad \forall v \in \mathcal{V}_\alpha .$$

Donc u est solution de (2.20).

Réciproquement si u est solution de (2.20) alors, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz = \left< -\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right), v \right> = \left< r^\alpha f, v \right>$$

Donc $-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right) = r^\alpha f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

D'autre part $u \in S_\alpha$ et on peut appliquer la proposition 2.14

$$\int_\Omega r^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} r^\alpha \frac{\partial u}{\partial z}\right) v\, dr dz$$

$$= \underset{<T'_\alpha , T_\alpha>}{<\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}, \gamma v>} = \underset{<T'_\alpha , T_\alpha>}{<g, \gamma v>} \qquad \forall v \in \mathcal{V}_\alpha .$$

Puisque γ est surjectif de $\mathcal{V}_\alpha$ sur T_α on a $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = g$ et u est solution de (P').

On a maintenant à notre disposition tous les résultats nécessaires à l'étude des problèmes dégénérés qui interviendront dans la suite. L'objet des chapitres suivants est l'étude des espaces fonctionnels qu'il faut introduire pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Stokes par l'intermédiaire de la formulation variationnelle associée.

III - UN THEOREME DE TRACES

3.1 Définitions

On désignera dans la suite :

$$\tilde{V}_s = V_3 \qquad \tilde{V}_z = V_1$$

$$V_s = V_3 \qquad V_z = V_1$$

$$H_s = H_3 \qquad H_z = H_1$$

$\tilde{V}_s$ et V_s (res. $\tilde{V}_z$ et V_z) sont munis du produit scalaire
$((\ , \ ))_s = ((\ , \ ))_3$ (resp.$((\ , \ ))_z = ((\ , \ ))_1$)

H_s (resp.H_z) est muni du produit scalaire $(\ , \ )_s = (\ , \ )_3$ (resp.$(\ , \ )_z =$

$(\ , \ )_1$).

(3.1) $\mathcal{H} = H_s \times H_z$ muni du produit scalaire $(u,v)_{\mathcal{H}} = (u_s, v_s)_s + (u_z, v_z)_z$

(3.2) $$\tilde{\operatorname{div}}\, u = 2\, u_s + r \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s) + \frac{\partial (r u_z)}{\partial z}\right)$$

(3.3) $$\tilde{\operatorname{grad}}\, p = \begin{cases} r^2 \dfrac{\partial p}{\partial r} \\ r \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

(3.4) On désigne par $E(\Omega)$ l'espace des $u \in \mathcal{H}$ tels que $\tilde{\operatorname{div}}\, u \in H_z$

On muni cet espace du produit scalaire :

(3.5) $$((u,v))_{E(\Omega)} = (u_s, v_s)_s + (u_z, v_z)_z + (\tilde{\operatorname{div}}\, u, \tilde{\operatorname{div}}\, v)_z$$

(3.6) On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des traces de fonctions de $\tilde{V}_z$ et par $\mathcal{C}'$ son dual que l'on muni de la topologie forte du dual.

■

Proposition 3.1 $E(\Omega)$ muni de la norme prédédémment définie est un espace de Hiblert (évident).

3.2 Formule de Stokes généralisée.

Proposition 3.2 L'espace $E(\Omega)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$

$$(3.7)\quad \mathcal{E}(\Omega) = \left\{ \vec{U} \in IL^2_{\frac{1}{r}\,drdz} \qquad \operatorname{div} \vec{U} \in L^2_{\frac{1}{r}\,drdz} \right\}$$

$$(3.8)\quad \text{L'isomorphisme est : } \vec{u} \in E(\Omega) \to \vec{U} = \begin{pmatrix} r^2 u_s \\ r\, u_z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(\Omega)$$

Proposition 3.3. L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$.

Soit $\vec{U} \in \mathcal{E}(\Omega)$ montrons qu'il existe une suite U_ε qui tend faiblement vers U dans $\mathcal{E}(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.

1°/Considérons tout d'abord le cas ou U est à support compact K assez petit pour que la condition suivante soit réalisée.

$$(H)\quad \begin{cases} K \subset \bar{\Omega} \\ \text{Il existe un ensemble convexe ouvert } C \text{ tel que } 0 \in \bar{C} \text{ et,} \\ \text{pour tout } x \in K \cap \Gamma \quad x + C \in \subset_{\bar{\Omega}} \end{cases}$$

Soit $\tilde{U} = U$ dans Ω

0 hors de Ω

$$\frac{\partial \tilde{U}_s}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{U}_s}{\partial r} + \mu_r$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial z} + \mu_z$$

où μ_r et μ_z sont des distributions à support dans $K \cap \Gamma$.

Soient

$$- \rho \in \mathcal{D}(R^2) \text{ à support dans } C,\ \rho \geqslant 0 \text{ et } \int_{R^2} \rho(x)\, dx = 1$$

$$- \varepsilon \in]0,1[\text{ et } \rho_\varepsilon : x \to \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\ \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ρ_ε est à support inclus dans C puisque C est convexe.

$\rho_\varepsilon * \tilde{U} \in \mathcal{D}(R^2)$ et on vérifie que sa restriction U_ε à $\Omega \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{E}(\Omega)$

On va montrer que $U_\varepsilon \to U$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ faible quand $\varepsilon \to 0$.

Etablissons d'abord le :

Lemme 3.1

Si $u \in L^2_{r^\alpha dr dz}(R^2)$ $\alpha \leqslant 0$ et $u = 0$ pour $r > A$

alors $\rho_\varepsilon * u$ dans $L^2_{r^\alpha dr dz}(R^2)$ faible quand $\varepsilon \to 0$

Démonstration

$\rho_\varepsilon * u \to u$ dans $\mathcal{D}'(R^2)$ donc :

$$< \rho_\varepsilon * u - u, \varphi > \to 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^2)$$

$\mathcal{D}(R^2)$ étant dense dans $L^2_{r^\alpha dr dz}$ on aura $\rho_\varepsilon * u \to u$ dans $L^2_{r^\alpha dr dz}(R^2)$ faible si $\rho_\varepsilon * u$ est faiblement borné dans $L^2_{r^\alpha dr dz}$.

Soit $\varphi \in L^2_{r^\alpha dr dz}(R^2)$

$$\begin{aligned} < \rho_\varepsilon * u, \varphi > &= \iint (\rho_\varepsilon * u)(r,z)\, \varphi(r,z)\, dr dz \\ &= \iint \rho_\varepsilon(r,z)(u*\varphi)(r,z) dr dz \\ &= \iint \rho_\varepsilon(r,z) \iint u(r-\rho, z-\xi)\varphi(\rho,\xi) d\rho d\xi\, dr dz \\ &= \iint \rho_\varepsilon(r,z) \iint \rho^{-\frac{\alpha}{2}} u(r-\rho, z-\xi) \rho^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(\rho,\xi) d\rho d\xi\, dr dz \end{aligned}$$

Or : $\rho^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(\rho,\xi) \in L^2(R^2)$ et $\rho^{-\frac{\alpha}{2}}\ u(r-\rho,z-\xi) \in L^2(R^2)\ \ \forall\ r,\ z$

On a donc :

$$< \rho_\varepsilon * u,\ \varphi > \leq A^{-\alpha} \iint \rho_\varepsilon(r,z)\ ||\varphi||_{L^2_{r^\alpha\ drdz}(R^2)}\ \ ||u||_{L^2(R^2)}\ drdz$$

$$\leq A^{-\alpha}\ ||\varphi||_{L^2_{r^\alpha\ drdz}(R^2)}\ \ ||u||_{L^2(R^2)}$$

D'où le résultat. ∎

Donc $\rho_\varepsilon * \tilde{U} \to \tilde{U}$ dans $\mathbb{L}^2_{r^\alpha\ drdz}(R^2)$ faible et, sur Ω, $U_\varepsilon \to U$ dans $\mathbb{L}^2_{r^\alpha\ drdz}(\Omega)$ faible.

D'autre part :

$$\rho_\varepsilon * \operatorname{div} \tilde{U} = \rho_\varepsilon * \widetilde{\operatorname{div} U} + \rho_\varepsilon * (\mu_r + \mu_z)$$

ρ_ε a son support inclus dans C, $\rho_\varepsilon * (\mu_r + \mu_z)$ a son support dans C_Ω.

alors : $\operatorname{div} U_\varepsilon = (\rho_\varepsilon * \operatorname{div} \tilde{U})\Big|_\Omega = (\rho_\varepsilon * \widetilde{\operatorname{div} U})\Big|_\Omega$

et $\operatorname{div} U_\varepsilon \to \operatorname{div} U$ dans $L^2_{r^\alpha\ drdz}(\Omega)$ faible.

Donc $U_\varepsilon \to U$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ faible. ∎

2°/ Comme au lemme 2.3 on peut toujours se ramener au cas où la condition (H) est vérifiée. ∎

Proposition 3.4

Si Ω est assez régulier, alors il existe un opérateur linéaire continu γ_ν de $E(\Omega)$ dans $\mathcal{C}'$ tel que $\gamma_\nu u$ = restriction de $\vec{U} \cdot \vec{\nu}$ avec $\vec{U} = \begin{cases} r^2 u_s \\ r u_z \end{cases}$ quand $\vec{U} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. De plus on dispose de la formule de Stokes généralisée suivante valable pour tout $u \in E(\Omega)$ et tout $w \in \tilde{V}_z$:

$$(3.9) \qquad \int_\Omega (\tilde{\operatorname{div}}\, u\, w + r\, u_s \frac{\partial w}{\partial r} + u_z \frac{\partial w}{\partial z})\, r\, dr dz = \langle \gamma_\nu u ; \gamma w \rangle_{\langle \mathcal{C}', \mathcal{C} \rangle}$$

$$= \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{U} w + \vec{U} . \vec{\operatorname{grad}}\, w) dr$$

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{C}$ et soit $w \in \tilde{V}_z$ tel que $\varphi = \gamma w$

On considère l'expression :

$$(3.10) \qquad X_u(\varphi) = \int_\Omega (\tilde{\operatorname{div}}\, u\, w + r\, u_s \frac{\partial w}{\partial r} + u_z \frac{\partial w}{\partial z})\, r\, dr dz$$

Lemme 3.2 $X_u(\varphi)$ est indépendant de w

Démonstration

Soit w_1 et $w_2 \in \tilde{V}_z$ tels que $\gamma w_1 = \gamma w_2 = \varphi$

Alors $w = w_1 - w_2 \in V_z$ et, par conséquent, $w = \lim_{m \to \infty} w_m$ dans $\widetilde{V_z}$

avec $w_m \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Donc pour tout m :

$$< 2\, r\, u_s + r^2 \frac{\partial u_s}{\partial r} + r \frac{\partial u_z}{\partial z}, w_m > + < r^2 u_s, \frac{\partial w_m}{\partial r} > + < r\, u_z, \frac{\partial w_m}{\partial z} > = 0$$

Alors, à la limite :

$$\int_\Omega \left[(2\, u_s + r \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\ )\, w + r\, u_s \frac{\partial w}{\partial r} + u_z \frac{\partial w}{\partial z}\ \right] r\, dr dz = 0$$

et $X_u(\varphi)$ est indépendant de w ∎

$$|X_u(\varphi)| \le |\widetilde{\operatorname{div}}\, u|_z\, |w|_z + |u_s|_s\, \left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|_z + |u_z|_z\, \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|_z$$

$$\le ||u||_{E(\Omega)}\, ||w||_z$$

$$\le c_o\, ||u||_{E(\Omega)}\, ||\varphi||_{\mathcal{C}}$$

X_u est donc un opérateur continu de $\mathcal{C}$ dans R

(3.11) Donc il existe $g_u \in \mathcal{C}'$ tel que $X_u(\varphi) = < g_u, \varphi >_{<\mathcal{C}'\mathcal{C}>}$

De plus $||g_u||_{\mathcal{C}'} \le c_o\, ||u||_{E(\Omega)}$

et $\gamma_\nu : u \to g_u$ est un opérateur linéaire continu de $E(\Omega)$ dans $\mathcal{C}'$

On a alors :

$$\int_\Omega (\tilde{\operatorname{div}}\, u\, w + r\, u_s \frac{\partial w}{\partial r} + u_z \frac{\partial w}{\partial z})\, r\, dr dz = < \gamma_\nu\, u, \gamma\, w >_{<\mathcal{C}'\mathcal{C}>}$$

Il reste à montrer que γ_ν prolonge $u \to \vec{U}.\vec{\nu}$ pour $\vec{U} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

Soit $w \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$$X_u(\gamma w) = \int_\Omega \left[(2u_s + r\frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z})w + r\,u_s\frac{\partial w}{\partial r} + u_z\frac{\partial w}{\partial z}\right] r\,drdz$$

$$= \int_\Omega \left[(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,u_z))w + r^2 u_s\frac{\partial w}{\partial r} + r\,u_z\frac{\partial w}{\partial z}\right] drdz$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s\, w) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,u_z\, w)\, drdz$$

$$= \int_\Gamma w(\vec{U}\cdot\vec{\nu})\, d\Gamma \quad \text{(formule de Stokes)}$$

$$= \langle \vec{U}\cdot\vec{\nu}, \varphi \rangle_{\langle \mathcal{C}', \mathcal{C} \rangle} \qquad \forall w \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

$\gamma(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ étant dense dans $\mathcal{C}$, on a par continuité :

$$X_u(\varphi) = \langle \vec{U}\cdot\vec{\nu}, \varphi \rangle_{\langle \mathcal{C}', \mathcal{C} \rangle} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}$$

Donc $\gamma_\nu u = \vec{U}\cdot\vec{\nu}$ ∎

<u>Proposition 3.5</u> Le noyau de γ_ν est l'ensemble $E_o(\Omega)$ isomorphe à l'espace $\mathcal{E}_o(\Omega)$ fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$

<u>Démonstration</u>

1°/ Si $u \in E_o(\Omega)$, alors, par définition de cet espace, il existe une suite de fonctions $U_m \in \mathcal{D}(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ qui converge vers U dans $\mathcal{E}(\Omega)$

Alors $\gamma_\nu u_m = 0$ et, par continuité de γ_ν, $\gamma_\nu u = 0$,

2°/ Soit $u \in E(\Omega)$ tel que $\gamma_\nu u = 0$

On va montrer que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que

$$\| U - \varphi \|_{\mathcal{E}(\Omega)} < \varepsilon$$

On prolonge U par 0 hors de Ω. Soit $\tilde{U}$ ce prolongement.

Soit $\Phi \in \mathcal{D}(R^2)$ et φ sa restriction à Ω.

Alors $$\int_\Omega (\operatorname{div} U \varphi + \vec{U} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \varphi) \, dr dz = 0$$

$$\int_{R^2} (\widetilde{\operatorname{div} U} \Phi + \tilde{U} \cdot \operatorname{grad} \Phi) \, dr dz = 0 \qquad \forall \Phi \in \mathcal{D}(R^2)$$

Donc $\widetilde{\operatorname{div} U} = \operatorname{div} \tilde{U}$ et $\tilde{U} \in \mathcal{E}(R^2)$

Comme au lemme 2.3 on se ramène au cas où le support K de U est suffisamment petit pour que la condition suivante soit réalisée:

Il existe C convexe ouvert tel que $0 \in C$ et $K - C \subset \Omega$.

Soit ρ et ρ_ε comme au lemme 2.3 et soit $\overset{v}{\rho}_\varepsilon (x) = \rho_\varepsilon(-x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho \left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$

On vérifie alors que la restriction à Ω de $\overset{v}{\rho}_\varepsilon * U$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et converge vers U dans $\mathcal{E}(\Omega)$

■

IV_ ETUDE DES ESPACES DE FONCTIONS A DIVERGENCE NULLE

On appellera :

(4.1) $\mathcal{V} = \{ v \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tels que } \widetilde{\text{div}}\, v = 0 \}$

(4.2) V = fermeture de $\mathcal{V}$ dans $V_s \times V_z$

(4.3) H = fermeture de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$

4.1 Théorème de de RHAM

Proposition 4.1 Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, une condition nécessaire et suffisante pour que $f = \widetilde{\text{grad}}\, p$ est que $< f, v > = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V}$

Démonstration

Si $f = \widetilde{\text{grad}}\, p$, alors :

$$< f, v > = < \widetilde{\text{grad}}\, p, v > = < r^2 \frac{\partial p}{\partial r}, v_s > + < r \frac{\partial p}{\partial r}, v_z >$$

$$= < \frac{\partial p}{\partial r}, r^2 v_s > + < \frac{\partial p}{\partial r}, r v_z >$$

Alors $\cup = \begin{cases} r^2 v_s \\ r\, v_z \end{cases}$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ et est à divergence nulle

Donc $< f, v > = - < p, \text{div } \cup > = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}$

Réciproquement si $< f, v > = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}$

$$< \frac{f_s}{r^2}, r^2 v_s > + < \frac{f_z}{r}, r\, v_z > = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}$$

Donc, si on désigne par $\mathcal{L}$ l'application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ définie

par $\begin{pmatrix} v_s \\ v_z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\Omega) \to \begin{pmatrix} r^2 v_s \\ r\, v_z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$< \frac{f_s}{r^2} , u_s > + < \frac{f_z}{r}, u_z > = 0 \qquad \forall\, u = \begin{pmatrix} u_s \\ u_z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$$

Or, l'application $\mathcal{L}$ étant surjective de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{U}$, espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à divergence nulle, on a :

$$< \frac{f_s}{r^2}, u_s > + < \frac{f_z}{r}, u_z > = 0 \qquad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

Donc, d'après le théorème de De Rham : $\exists\, p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que

$$\frac{f_s}{r^2} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{f_z}{r} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

ou encore $f = \widetilde{\text{grad}}\ p$

■

Proposition 4.2

(i) Si une distribution p a son gradient dans $(H_z)^2$ alors p est dans H_z et

$$||p||_{H_z/R} \leq C(\Omega)\ ||\text{grad } p\ ||_{(H_z)^2} = C(\Omega) \int_\Omega r\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 + r\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \, dr\,dz$$

(ii) Si une distribution p est telle que $\widetilde{\text{grad}}\ p \in V_s' \times V_z'$ alors p est dans H_z.

Démonstration de (i)

Soit $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\frac{\partial p}{\partial r}$ et $\frac{\partial p}{\partial z} \in H_z$

Soit $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{ (r,z) \in R^2 / r > \varepsilon \}$ ($\varepsilon < \beta$ défini en (1.9))

Alors pour tout ε tel que $\beta > \varepsilon > 0$, $\frac{\partial p}{\partial r}$ et $\frac{\partial p}{\partial z} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$

Donc $p \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et par conséquent à $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

On va maintenant chercher une estimation de $\int_{\Omega_\varepsilon} r\, p^2\, drdz$ indépendante de ε.

Soit $\varphi \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$.

$$\varphi(z,r) = \varphi(z,R(z)) - \int_r^{R(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)\, dx$$

$$|\varphi(z,r)|^2 \leq |\varphi(z,R(z)|^2 + 2|\varphi(z,R(z))| \int_r^{R(z)} |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|\, dx$$

$$+ \left(\int_r^{R(z)} |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|\, dx \right)^2$$

$$\leq |\varphi(z,R(z))|^2 + 2|\varphi(z,R(z))| \int_r^{R(z)} \frac{1}{\sqrt{x}} |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|\, \sqrt{x}\, dx$$

$$+ \left(\int_r^{R(z)} \sqrt{x} |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)| \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \right)^2$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz on obtient :

$$|\varphi(z,r)|^2 \leq |\varphi(z,R(z))|^2 + 2|\varphi(z,R(z))| |\text{Log } r|^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^{R(z)} x |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ 2(\varphi(z,R(z))| |\text{Log } R(z)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^{R(z)} x |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ |\text{Log } r| \int_r^{R(z)} x |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|^2\, dx$$

$$+ |\text{Log } R(z)| \int_r^{R(z)} x |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,x)|^2\, dx$$

En utilisant l'hypothèse (1.9) on obtient, en posant

$$C = \max\left(|\mathrm{Log}\ \beta_2|,\ |\mathrm{Log}\ \beta_1|\right) \tag{4.4}$$

$$|\varphi(z,r)|^2 \leq |\varphi(z,R(z)|^2 + 2|\varphi(z,R(z))||\mathrm{Log}\ r|^{\frac{1}{2}}\left(\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ 2|\varphi(z,R(z))|\sqrt{C}\left(\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ |\mathrm{Log}\ r|\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx \tag{4.5}$$

$$+ C\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx$$

Multiplions (4.5) par r et intégrons sur Ω_ε :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} r|\varphi(z,r)|^2\,drdz \leq \beta_2\,||\varphi(z,R(z))||^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

$$+ 2\int_0^L |\varphi(z,R(z))|\int_\varepsilon^{R(z)} |\mathrm{Log}\ r|^{\frac{1}{2}}\left(\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} drdz$$

$$+ 2\sqrt{C}\int_0^L |\varphi(z,R(z))|\int_\varepsilon^{R(z)}\left(\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} drdz \tag{4.6}$$

$$+\int_0^L\int_\varepsilon^{R(z)} |\mathrm{Log}\ r|\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\,drdz$$

$$+ C\int_0^L\int_\varepsilon^{R(z)}\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\,drdz$$

On va majorer successivement les différents termes du membre de droite de l'inégalité (4.6).

$$\int_{\Omega_\varepsilon} r|\varphi(z,r)|^2\,drdz \leq M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$$

Le premier terme M_1 est majoré indépendamment de ε

Majoration du second terme M_2

En utilisant l'inégalité de Schwarz on obtient :

$$M_2 \leq 2\int_0^L |\varphi(z,R(z))| \left(\int_\varepsilon^{R(z)} |\text{Log } r|\,dr\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\varepsilon^{R(z)}\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2\left(\int_0^{\beta_2} |\text{Log } r|\,dr\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi(z,R(z))\|_{L^2(\Gamma_2)} \left(\int_\varepsilon^L\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\,dr\,dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4.7)\quad M_2 \leq 2\left(\int_0^{\beta_2} |\text{Log } r|\,dr\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi(z,R(z))\|_{L^2(\Gamma_2)} \sqrt{\beta_2}\left(\int_\Omega r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 dr\,dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

Majoration du troisième terme M_3

$$M_3 \leq 2\sqrt{C}\int_0^L |\varphi(z,R(z))|\sqrt{R(z)}\left(\int_\varepsilon^{R(z)}\int_r^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\,dr\right)^{\frac{1}{2}} dz$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz on obtient :

$$M_3 \leq 2\sqrt{C}\,\beta_2 \|\varphi(z,R(z))\|_{L^2(\Gamma_2)} \left(\int_0^L\int_0^{R(z)}\int_0^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z,x)\right|^2 dx\,dr\,dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4.8)\quad M_3 \leq 2\sqrt{C}\,\beta_2 \|\varphi(z,R(z))\|_{L^2(\Gamma_2)} \int_\Omega r\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|^2 dr\,dz$$

Majoration du quatrième terme

$$M_4 \leq \int_0^L \left(\int_0^{R(z)} |\text{Log } r|\,dr\right)\left(\int_0^{R(z)} x\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}(z,x)\right|^2 dx\right) dz$$

$$(4.9)\quad M_4 \leq \left(\int_0^{\beta_2} |\text{Log } r|\,dr\right)\int_\Omega r\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|^2 dr\,dz$$

Majoration du 5ème terme

$$(4.10)\quad M_5 \leq C\,\beta_2 \int_\Omega r\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|^2 dr\,dz$$

En résumé (4,7),(4.8),(4.9),(4.10) donnent une majoration de $\int_{\Omega_\varepsilon} r\,\varphi^2\,drdz$ indépendante de ε pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\varepsilon)$.

Comme $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ est dense dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ cette majoration a encore lieu pour toute fonction de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et, par conséquent, pour toute distribution p à gradient dans H_z.

■

Démonstration de (i i)

Soit $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial r}$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z} \in H_z$

Soit $E = \{ q \in H_z$ tel que $\exists\ v \in V_s \times V_z$ tel que $q = \widetilde{\operatorname{div}}\, v \}$

Définissons $\ell : E \to R$ par

$$q \to \ell(q) = \left\langle \frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial r}, v_s \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}, v_z \right\rangle$$

où $v = \begin{pmatrix} v_s \\ v_z \end{pmatrix} \in V_s \times V_z$ et $\widetilde{\operatorname{div}}\, v = q$

Cette définition a bien un sens. En effet soient v^1 et $v^2 \in V_s \times V_z$ tels que $\widetilde{\operatorname{div}}\, v_1 = \widetilde{\operatorname{div}}\, v_2 = q$ et désignons par $\ell_1(q)$(resp $\ell_2(q)$) les valeurs de $\ell(q)$ calculées par l'intermédiaire de v_1(resp.v_2)

Alors :

$$\ell_1(q) - \ell_2(q) = \left\langle \frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial r}, v_s^1 - v_s^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}, v_z^1 - v_z^2 \right\rangle$$

Notons $v = v_1 - v_2$. Il s'agit de voir que :

$$(4.11)\quad \left\langle \frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial r}, v_s \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}, v_z \right\rangle = 0 \qquad \forall\ v \in V$$

(4.11) est vrai pour tout $v \in \mathcal{V}$ donc pour tout $v \in V$ car $\mathcal{V}$ est dense dans V.

Donc ℓ est bien définie et c'est une forme linéaire sur E.

Montrons qu'elle est continue pour la topologie de H_Z.

Soit $q \in E$. Alors $\forall\, v \in V_S \times V_Z$ tel que $\widetilde{\text{div}}\, v = q$ on a :

$$|\ell(q)| \leqslant C||v||_{V_S \times V_Z}$$

Le théorème 2.1 montre qu'il existe $v \in V_S \times V_Z$ tel que $\widetilde{\text{div}}\, v = q$ et $||v||_{V_S \times V_Z} \leqslant C|q|_{H_Z}$ à condition que $\widetilde{\text{div}}\,(V_S \times V_Z)$ soit fermé dans H_Z.

Vérifions cela

Lemme 4.1

$\widetilde{\text{div}}\,(V_S \times V_Z)$ est fermé dans H_Z

Démonstration

On va montrer que $\widetilde{\text{div}}\,(V_S \times V_Z) = \{ f \in H_Z / \int_\Omega r\, f = 0 \}$

d'où l'on déduit immédiatement le résultat.

Si $f = \widetilde{\text{div}}\, u$ avec $u \in V_S \times V_Z$ alors :

$$f \in H_Z \text{ et } \int_\Omega r\, f = \int_\Omega r\, \widetilde{\text{div}}\, u = \langle \gamma_\nu\, u, 1 \rangle \text{ (cf. prop.3.4)}$$

Donc $\int_\Omega rf = 0$

Réciproquement montrons que si $f \in H_Z$ et vérifie $\int_\Omega r\, f = 0$ il existe

$$u \in V_S \times V_Z \text{ tel que } f = \widetilde{\text{div}}\, u$$

Soit ϑ le domaine de R^3 ; à symétrie de révolution, décrit par rotation de Ω autour de l'axe $r = 0$

f est le représentant en coordonnées cylindriques d'une fonction encore notée $f \in L^2(\vartheta)$ et vérifiant $\int_\vartheta f = 0$

Il existe donc $\vec{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \in IH_o^1(\mathcal{J})$ tel que div $\vec{v} = f$ dans $\mathcal{J}$

(cf. lemme 4.2 ci-après).

En coordonnées cylindriques $\vec{v} = \begin{Bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{Bmatrix}$ vérifiera :

$$(4.12) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\, v_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = f$$

et de plus :

1°/ $v_r, v_z \in L^2_r(\mathcal{J})$:

$$\int_{\mathcal{J}} r\, v_r^2 \, dr d\theta\, dz = \int_{\mathcal{J}} (v_x^2 + v_y^2)\, dr\, d\theta dz = \int_{\mathcal{J}} (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dydz < \infty$$

$$\int_{\mathcal{J}} r\, v_z^2 \, dr d\theta\, dz = \int_{\mathcal{J}} v_z^2 \, dxdydz < \infty$$

2°/ $\frac{\partial v_r}{\partial r}$ et $\frac{\partial v_r}{\partial z} \in L^2_r(\mathcal{J})$:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \cos^2\theta \, \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sin\theta \cos\theta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \sin^2\theta \, \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

et chacun des termes de cette somme appartient à $L^2_r(\mathcal{J})$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \cos\theta \, \frac{\partial v_x}{\partial z} + \sin\theta \, \frac{\partial v_y}{\partial z} \in L^2_r(\mathcal{J})$$

3°/ $\frac{\partial v_z}{\partial r}$ et $\frac{\partial v_z}{\partial z} \in L^2_r(\mathcal{J})$:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \cos\theta \, \frac{\partial v_z}{\partial x} + \sin\theta \, \frac{\partial v_z}{\partial y} \in L^2_r(\mathcal{J})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \in L^2_r(\mathcal{J})$$

Définissons maintenant $u = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_z \end{Bmatrix}$ par :

$$u_s = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} v_r\,(r, \theta, z)\, d\theta$$

$$u_z = \int_0^{2\pi} v_z(r, \theta, z)\, d\theta$$

Alors u vérifiera :

$$\widetilde{\operatorname{div}}\, u = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s) + \frac{\partial}{\partial z}(r\, u_z)\right) = f$$

et de plus :

1°/ $u_s \in L^2_{r^3}(\Omega)$:

$$\int_\Omega r^3\, u_s^2\, dr dz = \int_\Omega r \left(\int_0^{2\pi} v_r(r, \theta, z)\, d\theta\right)^2 dr dz$$

$$\leqslant \int_\Omega r \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} v_r^2\, d\theta\right) dr dz$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi} \int_\Omega \int_0^{2\pi} r\, v_r^2\, d\theta \cdot dr dz$$

2°/ $\dfrac{\partial u_s}{\partial z} \in L^2_{r^3}(\Omega)$:

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_r}{\partial z}(r, \theta, z)\, d\theta$$

et appartient donc à $L^2_{r^3}(\Omega)$ comme u_s

3°/ $u_z \in L^2_r(\Omega)$

$$\int_\Omega r\, u_z^2\, dr dz = \int_\Omega r \left(\int_0^{2\pi} v_z\, d\theta \right)^2 dr dz$$

$$\leq \sqrt{2\pi} \int_\Omega \int_0^{2\pi} r\, v_z^2\, d\theta\, dr dz$$

4°/ $\dfrac{\partial u_z}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \in L^2_r(\Omega)$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_z}{\partial r}\, d\theta$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \frac{dv_z}{\partial r}\, d\theta$$

qui appartiennent à $L^2_r(\Omega)$ comme u_z.

5°/ $\dfrac{\partial u_s}{\partial r} \in L^2_r\, 3(\Omega)$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_r}{\partial r} d\theta - \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} v_r\, d\theta$$

$$\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_r}{\partial r}\, d\theta \in L^2_r\, 3(\Omega) \text{ comme } \frac{\partial u_s}{\partial z}$$

Il reste donc à montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} v_r\, d\theta \in L^2_{\frac{1}{r}}(\Omega)$:

Intégrons (4.12) de 0 à 2π il vient :

$$\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} v_r\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_r}{\partial r}\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_z}{\partial z}\, d\theta = 2\pi f$$

De $\int_0^{2\pi} \frac{\partial v_r}{\partial r}\, d\theta$, $\int_0^{2\pi} \frac{\partial v_z}{\partial z}\, d\theta$, $f \in L^2_r(\Omega)$ on conclut :

$$\frac{1}{r}\int_0^{2\pi} v_r\, d\theta \in L^2_r(\Omega) \text{ ou encore } \int_0^{2\pi} v_r\, d\theta \in L^2_{\frac{1}{r}}(\Omega)$$

De tous ces résultats on conclut :

$$u \in \widetilde{V_s} \times \widetilde{V_z} \text{ et } \widetilde{\text{div}}\ u = 0$$

Comme $u|_\Gamma = 0$ on a: $u \in V_s \times V_z$

■

Lemme 4.2

Si $f \in L^2(\Omega)$ (Ω ouvert de R^3 assez régulier) et vérifie

$\int_\Omega f = 0$ il existe $u \in (H^1_0(\Omega))^2$ tel que div $u = f$.

Démonstration

Soit φ la fonction égale à la distance d'un point de Ω à sa frontière Γ

Soit v solution de :

$$\text{div } (\varphi \text{ grad } v) = f \text{ dans } \Omega.$$

Alors d'après BAOUENDI [1] $v \in H^1(\Omega)$ et ses dérivées secondes sont dans $L^2_{\varphi^2 d\Omega}$. De sorte que $\vec{u} = \varphi\ \vec{\text{grad}}\ v \in (H^1_0(\Omega))^2$ et vérifie div $u = f$

■

Reprise de la démonstration de la proposition 4.2(ii)

Donc ℓ (q) est une forme linéaire continue sur E.

D'après le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger ℓ à H_z entier et, par conséquent il existe $p' \in H_z$ tel que

$$\ell(q) = (p', q)_{H_z} \qquad \forall\, q \in H_z .$$

Donc en prenant $q \in E$ on a :

$$< r^2 \frac{\partial p}{\partial r}, v_s > + < r \frac{\partial p}{\partial z}, v_z > = (p', \widetilde{\text{div}}\ v)_{H_z} \qquad \forall\, v \in V_s \times V_z$$

D'où en prenant v dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on obtient $p' = -p$ et par conséquent $p' \in H_z$.

■

4.2 Caractérisation de H et de son orthogonal $H^\perp$

Proposition 4.3

(i) $H^\perp = \left\{ u \in \mathcal{H} \ / \ u_s = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \text{ et } u_z = \frac{\partial p}{\partial z}, \ p \in H_z \right\}$

(ii) $H = \left\{ u \in \mathcal{H} \ / \ \widetilde{\text{div}}\ u = 0 \text{ et } \gamma_\nu u = 0 \right\}$

Démonstration de (i)

Soit u appartenant au membre de droite de (i)

Alors, pour $v \in \mathcal{V}$

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}, v_s\right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial z}, v_z\right)_z$$

$$= \left\langle r^2 \frac{\partial p}{\partial r}, v_s \right\rangle + \left\langle r \frac{\partial p}{\partial z}, v_z \right\rangle$$

$$= 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V}$$

Donc $u \in H^{\perp}$.

Réciproquement si $u \in H^{\perp}$

alors $(u,v)_{\mathcal{H}} = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}$

$$\left\langle r^3 u_s, v_s \right\rangle + \left\langle r\, u_z, v_z \right\rangle = 0$$

Donc, d'après la proposition 4.1 il existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} r^3 u_s = r^2 \dfrac{\partial p}{\partial r} \\ r\, u_z = r \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{ou encore :} \qquad \begin{cases} u_s = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ u_z = \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Donc grad $p \in (H_z)^2$ et, d'après la proposition 4.2, $p \in H_z$

Donc u appartient au membre de droite de (i)

Démonstration de (ii)

Soit H^0 le membre de droite de (ii)

Montrons que $H \subset H^0$

Soit $u \in H$ alors u est limite dans $\mathcal{H}$ d'une suite u_m d'éléments de $\mathcal{V}$. Donc, la convergence ayant lieu aussi dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et l'opérateur $\widetilde{\text{div}}$ étant continu dans cet espace, $\widetilde{\text{div}}\ u_m = 0$ entraîne $\widetilde{\text{div}}\ u = 0$

On en conclut que u_m et u appartiennent à $E(\Omega)$ et que

$$||u - u_m||_{E(\Omega)} = |u - u_m|_{\mathcal{H}} .$$

Donc u_m converge vers u dans $E(\Omega)$ et $\gamma_\nu u = \gamma_\nu u_m = 0$

D'où $u \in H^o$

Réciproquement soit H^{oo} l'orthogonal de H dans H^o et soit $u \in H^{oo}$

Alors $H^{oo} \subset H^\perp$

Donc $u = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$ avec $p \in H_z$

D'autre part $u \in H^o$ entraîne $\dfrac{\partial(r^2 u_s)}{\partial r} + \dfrac{\partial(r u_z)}{\partial z} = 0$

Donc p vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \\ \text{avec comme condition aux limites} \\ \begin{pmatrix} r \frac{\partial p}{\partial r} \\ r \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_o \end{cases}$$

Donc (proposition 2.15) p est une constante et $u = 0$

On en conclut que $H^{oo} = \{0\}$ et $H = H^{o}$

Proposition 4.4

$$\mathcal{H} = H \oplus H_1 \oplus H_2$$

où

$$H_1 = \left\{ u \in \mathcal{H} \text{ tels que } u = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \text{avec } p \in H_z \quad \text{vérifiant} \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0 \right\}$$

$$H_2 = \left\{ u \in \mathcal{H} \text{ tels que } u = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}, \; p \in V_z \right\}$$

De plus H, H_1 et H_2 sont mutuellement orthogonaux.

Démonstration

Il est facile de voir que H_1 et H_2 sont contenus dans $H^{\perp}$ et que l'intersection de 2 des 3 ensembles H, H_1 et H_2 est réduite à $\{0\}$

Montrons que H_1 et H_2 sont orthogonaux

$$u \in H_1 \text{ entraîne } u = \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

$$v \in H_2 \text{ entraîne } v = \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r} \\ \frac{\partial q}{\partial z} \end{cases} \qquad q \in V_z$$

Montrons que $u \in E(\Omega)$. En effet $\widetilde{div}\ u = \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s) + \frac{\partial}{\partial z}(r\, u_z))$

$$\widetilde{div}\ u = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = 0$$

On peut donc appliquer la formule de Stokes généralisée : (proposition 3.4)

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left(r^2 u_s \frac{\partial q}{\partial r} + r\, u_z \frac{\partial q}{\partial z}\right) dr\,dz = \langle \gamma_\nu u, \gamma q \rangle_{\langle \mathcal{C}' \mathcal{C} \rangle} = 0$$

donc H_1 et H_2 sont orthogonaux dans $\mathcal{H}$.

Soit maintenant $u \in \mathcal{H}$. On va montrer que l'on peut écrire :

$u = u_o + u_1 + u_2$ où $u_o \in H$, $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2$

Soit p la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s) + \frac{\partial}{\partial z}(r\, u_z) \in H^{-1}(\Omega) \subset (V_z)' \\ p \in V_z \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : p sera alors solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in V_z \text{ tel que} \\ \int_\Omega r\left(\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dr\,dz = \int_\Omega \left(r\, u_s \frac{\partial \varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) r\, dr\,dz \\ \text{quel que soit } \varphi \in V_z \end{cases}$$

Posons : $u_2 = \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$. Alors $u_2 \in H_2$

D'autre part :

$$\widetilde{\text{div}}\,(u-u_2) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_s) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,u_z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right) = 0$$

Donc $u - u_2 \in E(\Omega)$ et $\gamma_\nu (u - u_2) \in \mathcal{C}'$

De plus :

$$\underset{<\mathcal{C}'\mathcal{C}>}{< \gamma_\nu (u-u_2),\ 1 >} = \int_\Omega \widetilde{\text{div}}(u-u_2)\ r\ dr dz = 0$$

Soit q la solution (unique à une constante additive près) de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial q}{\partial z}\right) = 0 \\ \\ \frac{\partial q}{\partial \vec{\nu}} = \gamma_\nu (u-u_2) \in \mathcal{C}' \\ \\ q \in \tilde{V}_z \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : q sera solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } q \in \tilde{V}_z \text{ tel que} \\ \\ \int_\Omega r\left(\frac{\partial q}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dr dz = \underset{<\mathcal{C}'\mathcal{C}>}{< \gamma_\nu (u-u_2),\ \gamma\varphi >} \quad \forall\, \varphi \in \tilde{V}_z \end{cases}$$

Posons : $u_1 = \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial q}{\partial z} \end{cases} \in H_1$

et $u_0 = u - u_1 - u_2$.

Il reste à vérifier que $u_o \in H$.

$$r \widetilde{\text{div}}\, u_o = r \widetilde{\text{div}}\, u - \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial p}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(r \frac{\partial p}{\partial z}) = 0$$

$$\gamma_\nu u_o = \gamma_\nu (u - u_2) - \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0$$

4.3 Caractérisation de V

Proposition 4.5

Soit $V^o = \{ u \in V_s \times V_z$ tels que $\widetilde{\text{div}}\, u = 0 \}$

Alors $V = V^o$

Démonstration

1°/ $V \subset V^o$

Soit $u \in V$. Alors u est limite dans $V_s \times V_z$ d'une suite u_m d'éléments de $\mathcal{V}$.

La convergence dans $V_s \times V_z$ implique la convergence :

$\widetilde{\text{div}}\, u_m \to \widetilde{\text{div}}\, u$ dans H_z et donc $\widetilde{\text{div}}\, u = 0$ et $u \in V^o$

2°/ On va montrer que toute forme linéaire continue sur V^o qui est nulle sur V reste nulle sur V^o. Comme V est un fermé de V^o on en conclura que $V = V^o$. (On a muni V^o de la topologie de $V_s \times V_z$)

Soit $L \in (V^o)'$ et $v \in V_s \times V_z$

Alors on peut écrire :

$$L(v) = \langle \ell_s, v_s \rangle + \langle \ell_z, v_z \rangle \text{ avec } \ell = \begin{pmatrix} \ell_s \\ \ell_z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

et $\langle \ell, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$

Donc (proposition 4.1) $\ell = \begin{cases} r^2 \dfrac{\partial p}{\partial r} \\ r \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$

$$< \ell_s , v_s > = - < p , \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_s) >$$

$$< \ell_z , v_z > = - < p , \frac{\partial}{\partial z} (r\, v_z) >$$

Donc $< \ell , v > = 0 \qquad \forall\, v \in V^o$

■

V. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE STOKES

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \vec{f} = \begin{cases} f_r \\ f_z \end{cases} \text{ étant donné dans } (H_z)^2 \text{ trouver } \vec{u} \begin{cases} u_s \\ u_z \end{cases} \in \tilde{V}_s \times \tilde{V}_z \\ \\ \text{et } p \in H_z \text{ vérifiant :} \\ \\ (5.1) \quad - \nu \left(3 \dfrac{\partial u_s}{\partial r} + r \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + r \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} \right) + \dfrac{1}{\rho o} \dfrac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \\ (5.2) \quad - \nu \left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u_z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \dfrac{1}{\rho o} \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \\ (5.3) \quad 2\, u_s + r \dfrac{\partial u_s}{\partial r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \\ (5.4) \quad \vec{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \text{ dans } \Omega$$

Ce problème est le problème de Stokes stationnaire en coordonnées cylindriques après le changement de fonction inconnue $u_r = r\, u_s$ où u_r est la composante radiale de la vitesse du fluide.

u_z et p sont la composante longitudinale de la vitesse et la pression.

Le vecteur $\vec{f} = \begin{cases} f_r \\ f_z \end{cases}$ représente les forces appliquées sur le fluide .

ρ_o et ν sont la masse volumique et la viscosité du fluide.

On va étudier le problème variationnel associé à ce problème aux limites en utilisant les propriétés des espaces V et H précédemment définis.

On va munir V du produit scalaire $((u,v)) = ((u_s, v_s))_s + ((u_z, v_z))_z$

et H du produit scalaire $(u,v) = (u_s, v_s)_s + (u_z, v_z)_z$

Ainsi V et H sont des espaces de Hilbert ; de plus :

$$\mathcal{V} \subset V \subset H \overset{\mathcal{J}}{\leftrightarrow} H' \subset V'$$

où le signe $\subset$ désigne l'inclusion algébrique et topologique avec densité. $\mathcal{J} = \begin{cases} \mathcal{J}_3 \\ \mathcal{J}_1 \end{cases}$ (cf.(2.2)).

<u>Remarque</u> $u \in \tilde{V}_s \times \tilde{V}_z$ et (5.3) et (5.4) donne $\vec{u} \in V$

<u>Formulation variationnelle</u>

$\vec{f}$ appartenant à $(H_z)^2$, le vecteur $\begin{cases} f_r \\ f_z \end{cases}$ appartient à $\mathcal{H}$.

Prenons le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de ce vecteur avec un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_s \\ v_z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{V}$.

$$\int_\Omega r^2 \, v_s \left(-\nu\left(3\frac{\partial u_s}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + r\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial r}\right) dr\,dz +$$

$$\int_\Omega r \, v_z \left(-\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho o}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \int_\Omega \left(r^2 f_r \, v_s + r f_z \, v_z\right) dr\,dz$$

ou encore :

$$< - \nu \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial u_s}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^3 \frac{\partial u_s}{\partial z}\right)\right) + \frac{r^2}{\rho o} \frac{\partial p}{\partial r}, v_s >$$

$$+ < - \nu \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right) + \frac{r}{\rho o} \frac{\partial p}{\partial z}, v_z >$$

$$= \int_\Omega (r^2 f_r v_s + r f_z v_z) \, drdz \ . \text{ D'où :}$$

$$\nu((u,v)) = \int_\Omega (r^2 f_r v_s + r f_z v_z) \, drdz \qquad \forall v \in \mathcal{V}$$

On voit que, f appartenant à $H_z \times H_z$, chaque membre de cette égalité dépend linéairement et continument de v pour la topologie de V. Donc cette égalité a encore lieu pour tout $v \in V$ et $\vec{u}$ est alors solution du problème variationnel :

$$(5.5) \quad \begin{cases} \text{f étant donné dans } H_z^2 \text{ trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que} \\ \nu((u,v)) = \int_\Omega (r^2 f_r v_s + r f_z v_z) \, drdz \qquad \forall v \in V. \end{cases}$$

Essayons d'établir la réciproque.

$$u \in V \text{ donne } u = 0 \text{ sur } \Gamma_o \text{ et } \widetilde{div}\ u = 0$$

De plus on a :

$$< - \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial u_s}{\partial r}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(r^3 \frac{\partial u_s}{\partial z}\right) - r^2 f_r, v_s >$$

$$+ < - \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - r f_z, v_z > = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{V}$$

Donc, d'après les propositions 4.1 et 4.2 il existe $p \in H_z$ tel que

$$\begin{cases} - \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial u_s}{\partial r}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(r^3 \frac{\partial u_s}{\partial z}\right) + \frac{r^2}{\rho o} \frac{\partial p}{\partial r} = r^2 f_r \\ - \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{r}{\rho o} \frac{\partial p}{\partial z} = r f_z \end{cases}$$

au sens des distributions. D'où (5.1) et (5.2)

On a ainsi établi le :

Lemme 5.1

Il y a équivalence entre le problème aux limites défini par (5.1) (5.2) (5.3) (5.4) et le problème variationnel (5.5).

On peut maintenant vérifier facilement, à l'aide du théorème des projections, la

Proposition 5.1 - Le problème (5.1) (5.2) (5.3) et (5.4) (problème de Stokes en symétrie de révolution) admet une solution unique.

Remarque 5.1

Le problème variationnel peut être écrit sous la forme :

$$\min_{v \in V} \nu\,((v,v)) - 2\,(F, v)$$

où $F = \begin{cases} \frac{f_r}{r} \\ f_z \end{cases}$

■

VI- AUTRE FORMULATION DU PROBLEME DE L'EQUATION RADIALE

On va maintenant donner une autre formulation du problème de l'équation radiale : c'est la formulation naturelle mais les espaces fonctionnels à introduire sont moins classiques que ceux de la première formulation.

6.1 Formulation variationnelle naturelle du problème relatif à l'équation radiale.

Reprenons le problèmes aux limites (1.15), (1.16)

$$(6.1)\quad \left\{ -\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{u_r}{r^2} = f_r \quad \text{dans } \Omega \right.$$

$$(6.2)\quad \left\{ u_r = 0 \quad \text{sur } \Gamma \right.$$

f_r étant donné dans $L^2_{r\,drdz}$

Prenons le produit scalaire dans $L^2_{r\,drdz}$ de f_r avec v_r nulle sur Γ

$$\int_\Omega r\left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{u_r}{r^2}\right) v_r \, drdz = \int_\Omega r\, f_r \, v_r \, drdz$$

$$\int_\Omega r\left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right)\right) v_r \, drdz = \int_\Omega r\, f_r \, v_r \, drdz$$

Donc si u_r et $v_r \in V_r$

$$\int_\Omega \frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(r\, v_z) + \frac{u_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) = \int_\Omega r\, f_r \, v_r$$

$$\int_\Omega \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r)\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\, u_r)\frac{\partial}{\partial z}(r\, v_r)\right] = \int_\Omega r\, f_r \, v_r$$

où $V_r = \left\{ v \in L^2_{\frac{1}{r}} \text{ tels que } \frac{\partial}{\partial r}(r\, v) \text{ et } \frac{\partial}{\partial z}(r\, v) \in L^2_{\frac{1}{r}} \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$

D'où le problème variationnel :

$$(6.3)\quad \left\{ \begin{array}{l} f_r \text{ étant donné dans } L^2_r \text{ trouver } u_r \in V_r \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r)\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\, u_r)\frac{\partial}{\partial z}(r\, v_r)\right] drdz = \int_\Omega r\, f_r \, v_r \quad \forall v_r \in V_r \end{array} \right.$$

6.2 Etude de l'espace V_r

Introduisons l'espace $\tilde{V}_r$:

$$(6.4)\quad \tilde{V}_r = \left\{ v \in L^2_{\frac{1}{r}} \text{ tels que } \frac{\partial}{\partial r}(r\,v) \text{ et } \frac{\partial}{\partial z}(r\,v) \in L^2_{\frac{1}{r}} \right\}$$

On muni $\tilde{V}_r$ de la norme :

$$(6.5)\quad ||v|| = \left[\int_\Omega \frac{1}{r}\left(v^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}(r\,v)\right)^2\right) dr\,dz\right]^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 6.1 - Muni de la norme (6.5) $\tilde{V}_r$ est un espace de Hilbert (évident)

Proposition 6.2 - $$\tilde{V}_r = \left\{ v \in L^2_{\frac{1}{r}} \text{ tels que } \frac{\partial v}{\partial r} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial z} \in L^2_r \right\}$$

On peut munir $\tilde{V}_r$ de la norme :

$$(6.6)\quad ||v||_r = \left(\int_\Omega \frac{u^2}{r} + r\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dr\,dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

et les normes (6.5) et (6.6) sont équivalentes.

Proposition 6.3 - Les fonctions de $\tilde{V}_r \cap \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ nulles du voisinage de $r = 0$ forment un sous espace dense dans $\tilde{V}_r$.

Démonstration

Soit $u \in \tilde{V}_r$ et $\eta > 0$ quelconque.

Montrons qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tel que

$$||u - \varphi||_r < \eta$$

D'après le lemme 2.2 il existe $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega) \cap \tilde{V}_r$ à support dans $\Omega_{\theta_1} = \{(r,z) \in \Omega / r > \theta_1\}$ et tel que $||u - \varphi_1||_z < \frac{\eta}{4}$

D'après le lemme 2.2 (valable en norme $L^2_{r^\alpha}$ pour α quelconque) il existe $\varphi_2 \in L^\infty(\Omega) \cap \tilde{V}_r$ à support dans $\Omega_{\theta_2} = \{(r,z) \in \Omega / r > \theta_2\}$ et tel que $||u - \varphi_2||_{L^2_{\frac{1}{r}}} < \frac{\eta}{4}$

Alors en posant $\varphi' = \varphi_1$ si $\theta_1 < \theta_2$ et $\varphi' = \varphi_2$ sinon et avec $\theta = \inf(\theta_1, \theta_2)$ on voit qu'il existe $\varphi' \in L^\infty(\Omega) \cap V_r$ à support dans $\Omega_\theta = \{(r,z) \in \Omega / r > \theta\}$ tel que

$$||u - \varphi'||_r < \frac{\eta}{2}$$

D'après le lemme 3.3 il existe $\varphi_3 \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_\theta)$ tel que

$$||\varphi' - \varphi_3||_z < \frac{\eta}{4}$$

D'autre part il existe $\varphi_4 \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_\theta)$ tel que

$$||\varphi' - \varphi_4||_{L^2(\Omega_\theta)} < \frac{\eta\theta}{4}$$

De sorte que :

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{r}(\varphi' - \varphi_4)^2 \, dr dz \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\theta} ||\varphi' - \varphi_4||_{L^2(\Omega_\theta)} < \frac{\eta}{4}$$

Alors l'une des deux fonctions φ_3 ou φ_4 approche u en norme $||\ ||_r$ à η près.

Proposition 6.4 (théorème de traces).

On peut définir la trace sur Γ des fonctions de $\tilde{V}_r$ dans $L^2(\Gamma)$ et l'opérateur trace est continu de $\tilde{V}_r$ dans $L^2(\Gamma)$. De plus si $u \in \tilde{V}_r$ alors $u|_{\Gamma_1} = 0$.

Démonstration

Soit $\Omega_{\beta_1} = \{r,z / r > \beta_1\}$ où β_1 est défini en (1.9)

Si $u \in \tilde{V}_r$ alors $u \in H^1(\Omega_{\beta_1})$ et on peut définir les traces :

$$\begin{cases} - \ u|_{\Gamma_2} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_2) \\ - \ u \text{ en } z = 0 \text{ dans } L^2(]\beta_1, R(0)[) \\ - \ u \text{ en } z = L \text{ dans } L^2(]\beta_1, R(L)[) \end{cases}$$

1°/ Montrons que l'on peut définir la trace en $z = 0$ dans $L^2(]0,\beta_1[)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \tilde{V}_r$.

$$\varphi^2(0,r) - \varphi^2(z,r) = - \ 2 \int_0^z \varphi(\xi,r) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi,r) d\xi$$

$$\int_0^{\beta_1} \varphi^2(0,r) dr \leqslant \int_0^{\beta_1} \int_0^z \frac{\varphi^2(\xi,r)}{r} + r\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi,r)\right)^2 d\xi \ dr + \int_0^{\beta_1} \varphi^2(z,r) dr$$

Intégrons de 0 à L :

$$L \int_0^{\beta_1} \varphi^2(0,r) dr \leqslant L \int_\Omega \frac{\varphi^2}{r} + r\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 dr dz + \int_\Omega \varphi^2 \ dr dz$$

$$(6.7)\quad L\int_0^{\beta_1}\varphi^2(0,r)dr \leqslant (L+1)\,||\varphi||^2_{\tilde{V}_r}$$

Comme $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \tilde{V}_r$ est dense dans $\tilde{V}_r$ (6.7) a encore lieu pour tout φ dans $\tilde{V}_r$ et on peut définir un opérateur trace continu de $\tilde{V}_r$ dans $L^2(]0,\beta_1[)$.

2°/ De même on peut définir la trace en $z = L$ dans $L^2(]0,\beta_1[)$

3°/ Montrons que l'on peut définir la trace en $r = 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \tilde{V}_r$.

$$\varphi^2(z,0) - \varphi^2(z,r) = -2\int_0^r \varphi(z,\rho)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(z,\rho)d\rho$$

$$\int_0^L \varphi^2(z,0)dz \leqslant \int_0^L\int_0^r \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2 d\rho\,dz + \int_0^L\int_0^r \frac{1}{\rho}\varphi^2\,d\rho dz + \int_0^L \varphi^2(z,r)dz$$

Intégrons de $r = 0$ à β_1 :

$$(6.8)\quad \beta_1\int_0^L \varphi^2(z,0)dz \leqslant \left(\beta_1 + \frac{1}{\beta_1}\right)||\varphi||^2_r$$

Comme $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \tilde{V}_r$ est dense dans $\tilde{V}_r$, (6.8) a encore lieu pour tout $\varphi \in \tilde{V}_r$ et on peut définir un opérateur trace en $r = 0$ continu de $\tilde{V}_r$ dans $L^2(]0,L[)$.

Comme les fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \tilde{V}_r$, nulles au voisinage de $r = 0$, forment un sous espace dense de $\tilde{V}_r$, les fonctions de $\tilde{V}_r$ on un trace nulle en $r = 0$

■

Proposition 6.5 - V_r est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\tilde{V}_r$.

Démonstration analogue à celle de la proposition 2.7

Proposition 6.6 - L'espace $\tilde{V}_r$ est isomorphe à l'espace $\tilde{V}_s$, l'isomorphisme étant défini par

$$(6.9) \qquad \mathcal{J} : u_r \in \tilde{V}_r \rightarrow u_s = \frac{u_r}{r} \in \tilde{V}_s$$

Démonstration

1°/ Montrons que si $u_r \in \tilde{V}_r$ alors u_s défini par (6.9) $\in \tilde{V}_s$

$$\int_\Omega r\, u_s^2 \, drdz = \int_\Omega \frac{u_r^2}{r} \, drdz$$

Donc $u_s \in H_z$

$$\int_\Omega r^3 \left(\frac{\partial u_s}{\partial z}\right)^2 drdz = \int_\Omega r \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 drdz$$

Donc $\dfrac{\partial u_s}{\partial z} \in H_s$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}$$

Comme $\frac{u_r}{r^2}$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} \in H_s$, on en conclut que $\frac{\partial u_s}{\partial r} \in H_s$ et $u_s \in \widetilde{V_s}$.

De plus :

$$||u_s||_s \leq \sqrt{2}||u_r||_r \qquad (6.10)$$

2°/ Réciproquement si $u_s \in \tilde{V}_s$ il existe $u_r \in \tilde{V}_r$ tel que $u_r = r\,u_s$

Soit $u_r = r\,u_s$

$$||u_r||_r^2 = \int_\Omega r\,u_s^2 + r\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_s)\right)^2 + r\left(\frac{\partial}{\partial z}(r\,u_s)\right)^2 \,dr\,dz$$

$$= \int_\Omega r\,u_s^2 + r\left(u_s + r\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)^2 + r^3\left(\frac{\partial u_s}{\partial z}\right)^2 \,dr\,dz$$

D'après ZUILY [18] il existe une constante C telle que :

$$\int_\Omega r\,u_s^2 \leq C\,||u_s||_s^2$$

$$||u_r||_r^2 \leq 2\,C\,||u_s||_s^2 + ||u_s||_s^2 + 2\int_\Omega r^2|u_s|\left|\frac{\partial u_s}{\partial r}\right| \,dr\,dz$$

$$||u_r||_r^2 \leq (2\,C+3)||u_s||_s^2 \qquad (6.11)$$

Donc $u_r \in \widetilde{V_r}$. Donc $\mathcal{J}$ est bijectif ; de plus il est continu d'après (6.10) ainsi que son inverse d'après (6.11).

Proposition 6.7 _ $\mathcal{J}$ est un isomorphisme de V_r sur V_s.

6.3 Equivalence des deux formulations

Proposition 6.8 - Le problème (6.3) admet une solution unique.

Démonstration

Posons $a(u,v) = \int_\Omega \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ru)\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial}{\partial z}(ru)\frac{\partial}{\partial z}(rv)\right) drdz$

$a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur V_r

De plus l'application $v \mapsto \int_\Omega r\, f_r\, v\, dr$ est continue sur V_r.

D'où l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.3)

■

On a donc obtenu l'équivalence des deux formulations du problème de l'équation radiale. On sait donc maintenant étudier la formulation variationnelle naturelle du problème de Stokes en symétrie de révolution :

Soit $\cup = \{\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} \in V_r \times V_z \ / \mathrm{div}(ru) = 0\}$

(6.12)
$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ étant donné dans } (H_r)^2 \text{ trouver } \vec{u} \in \cup \text{ tel que} \\ \int_\Omega \frac{1}{r}\ \vec{\mathrm{grad}}\,(ru)\ \vec{\mathrm{grad}}(rv)\, drdz = \\ + \int_\Omega r\, \vec{\mathrm{grad}}\, u_z\ \vec{\mathrm{grad}}\, v_z\ drdz = \int_\Omega r\, \vec{f}\, \vec{v}\ drdz \quad \forall\, v \in \cup \end{array}\right.$$

Cette formulation est alors équivalente à la formulation (5.5)

6.4 Conclusion

On a terminé l'étude du problème continu. Cette étude nous a permis

- de justifier la condition aux limites "physique" $u_r = 0$ en $r = 0$ introduite pour tenir compte de la symétrie de révolution,

- de rendre licite le changement de fonction inconnue $u_s = \frac{u_r}{r}$ et de voir que la formulation variationnelle correspondait à un problème bien posé possédant une solution unique.

- de montrer l'équivalence des deux formulations présentées.

De plus cette étude nous a permis de voir quels liens existaient entre les différents espaces fonctionnels étudiés et de préciser les normes (relatives à des mesures avec poids) sur chacun de ces espaces ce qui nous sera très utile pour l'étude de l'approximation du problème.

CHAPITRE 2

APPROXIMATION DU PROBLEME

I - LA METHODE DES ELEMENTS FINIS NON CONFORMES

La méthode des éléments finis non conformes est très intéressante pour la résolution des équations du type Stokes car ce sont les seuls éléments finis de degré .1 et, par conséquent, faciles à mettre en oeuvre à pouvoir approcher les espaces de fonctions à divergence nulle. De plus, l'espace des éléments finis non conformes de degré 1 est, avec celui des éléments finis de degré 4 (cf.THOMASSET [16], le seul espace dont on sait construire une base de fonctions à divergence discrète nulle (cf. CROUZEIX [4] ou THOMASSET [17]).

1.1. L'espace des éléments finis non conformes

Soit Ω un ouvert borné de R^2 et $\mathcal{C}_h$ une famille de triangles formant une triangulation de Ω. On supposera dans la suite que les triangulations considérées sont admissibles c'est à dire :

$$\Omega(h) = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \Delta \subset \Omega \tag{1.1}$$

$$\text{si } \Delta \text{ et } \Delta' \in \mathcal{C}_h \quad \overset{\circ}{\Delta} \cap \overset{\circ}{\Delta} = \emptyset \tag{1.2}$$

(1.3) si Δ et $\Delta' \in \mathcal{C}_h$

ou bien $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$

ou bien Δ et Δ' ont en commun soit un sommet soit un côté entier et un seul

et régulières c'est à dire que de plus :

$$\sigma(h) \leqslant m < \infty \quad \text{quand} \quad \rho(h) \to 0 \tag{1.4}$$

(1.5) $\Omega(h)$ converge vers Ω au sens suivant :

(1.6) Pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe $\delta = \delta(K) > 0$ tel que $\rho(h) \leqslant \delta(K)$ entraîne $K \subset \Omega(h)$

avec

(1.7) $\rho(h) = \sup_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \rho_\Delta$ (ρ_Δ diamètre du cercle circonscrit à Δ)

(1.8) $\rho'(h) = \inf_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \rho'_\Delta$ (ρ'_Δ diamètre du cercle inscrit dans Δ)

(1.9) $\sigma(h) = \sup_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \frac{\rho_\Delta}{\rho'_\Delta}$

Ces hypothèses sont en particulier vérifiées si la triangulation ne comprend pas d'angles inférieurs à $\theta_o > 0$.

On définit alors $\mathcal{U}_h$, ensemble des noeuds de la triangulation :

(1.10) $\mathcal{U}_h = \{M \in \overset{\circ}{\Omega}(h) \text{ t.q. } M \text{ soit le milieu d'un côté de triangle}\}$

On définit W_h, espace des éléments finis non conformes :

(1.11) W_h est l'espace des fonctions u_h linéaires sur chaque triangle $\Delta \in \mathcal{C}_h$, nulles hors de $\Omega(h)$ et telles que la valeur de u_h au milieu B_i d'un côté quelconque Δ_i d'un triangle $\Delta \in \mathcal{C}_h$ est nulle si ce côté est contenu dans la frontière de $\Omega(h)$ et si $\Delta_i \cap \overset{\circ}{\Omega}(h) \neq \emptyset$ alors les valeurs $u_h(B_i)$ sont les mêmes quand on considère B_i comme point de deux triangles adjacents différents.

On remarque que les fonctions de W_h qui valent 1 en un noeud de u_h et 0 en tous les autres noeuds forment une base de W_h.

1.2 Approximation de $H_o^1(\Omega)$

On remarque que $W_h \not\subset H_o^1(\Omega)$. On va donc réaliser une approximation externe de $H_o^1(\Omega)$. Pour cela on va définir un opérateur de dérivation discrète :

(1.12) $D_{ih}\ u_h(x) = \dfrac{u_h(x)}{\partial x_i}$ $\forall\ x \in \Delta$ $\forall\ i = 1,$ $\forall\ z \in C$

La fonction $D_{ih}\ u_h(x)$ est définie presque partout.

On munit W_h du produit scalaire (analogue discret du produit scalaire dans $H_1(\Omega)$) :

(1.13) $[\![u_h, v_h]\!] = (u_h, v_h) + \sum_{i=1}^{2} (D_{ih} u_h, D_{ih} v_h)$

où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

On va maintenant définir :

- un espace F

(1.14) $F = (L^2(\Omega))^3$

- un isomorphisme $\bar{\omega}$ de V_h dans F (isomorphisme d'extension)

(1.15) $\bar{\omega} : u \in H_o^1(\Omega) \to \bar{\omega}\ u = (u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}) \in F$

- un opérateur p_h de W_h dans F (prolongement) :

(1.16) $\quad p_h : u_h \in W_h \rightarrow p_h u_h = (u_h, D_{1h} u_h, D_{2h} u_h) \in F$

- un opérateur r_h de $H_o^1(\Omega)$ dans W_h (restriction) :

(1.17) $\quad u_h = r_h u$ est défini par $u_h(M) = u(M) \quad \forall M \in \mathcal{U}_h$

cet opérateur est défini pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et prolongé à $H_o^1(\Omega)$ en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_o^1(\Omega)$.

Les définitions (1.12) (1.13) (1.14) (1.15) (1.16) (1.17) définissent l'approximation externe de $H_o^1(\Omega)$ par W_h.

Les opérateurs p_h ont une norme égale à 1 et sont stables.

On a alors le résultat suivant :

Si les triangulations $\mathcal{C}_h$ sont régulières alors l'approximation de $H_o^1(\Omega)$ précédemment définie est stable et convergente c'est à dire :

(1.18) $\quad p_h r_h u \rightarrow \bar{\omega} u$ dans F fort $\quad \forall u \in H_o^1(\Omega)$ (convergence)

(1.19) si $p_h u_h \rightarrow v$ dans F faible alors $v \in \bar{\omega}(H_o^1(\Omega))$ (consistance)

Pour les démonstrations et une étude plus détaillée, voir TEMAM [15].

On va maintenant donner des résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis non conformes sur les équations de Stokes en coordonnées cartésiennes dans R^2 :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + \vec{\text{grad}}\, p = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \vec{u} = 0 & \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ frontière de } \Omega \end{cases}$$

1.3 Quelques résultats numériques

En vue d'une étude de la précision de la méthode, on l'a appliquée à des exemples tests. Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus par FORTIN [7] concernant les éléments finis de degré 2.

Le domaine Ω étant le carré $]0,1[\times]0,1[$, on a considé les fonctions de courant :

$1°/\ \psi = (\sin \pi x \sin \pi y)^2$

d'où $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \pi \sin^2 \pi x \sin 2\pi y.$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin^2 \pi y \sin 2\pi x$$

on a : $u \in H_0^1(\Omega)$ et div $\vec{u} = 0$

D'où, p étant choisi et en calculant $\vec{f} = -\Delta \vec{u} + \vec{\text{grad}}\, p$, on obtient $\vec{f}$ tel que $(\vec{u}, p)$ soit solution du problème de Stokes dans Ω :

$$f_x = -2\pi^3 \sin 2\pi y (2 \cos 2\pi x - 1) + \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$f_y = 2\pi^3 \sin 2\pi x (2 \cos 2\pi y - 1) + \frac{\partial p}{\partial y}$$

On s'est intéressé à l'erreur :

$$(1.20) \qquad e_h^x = \sup_{\substack{M \text{ noeud} \\ \text{de la triangulation}}} |u_h^x(M) - u^x(M)|$$

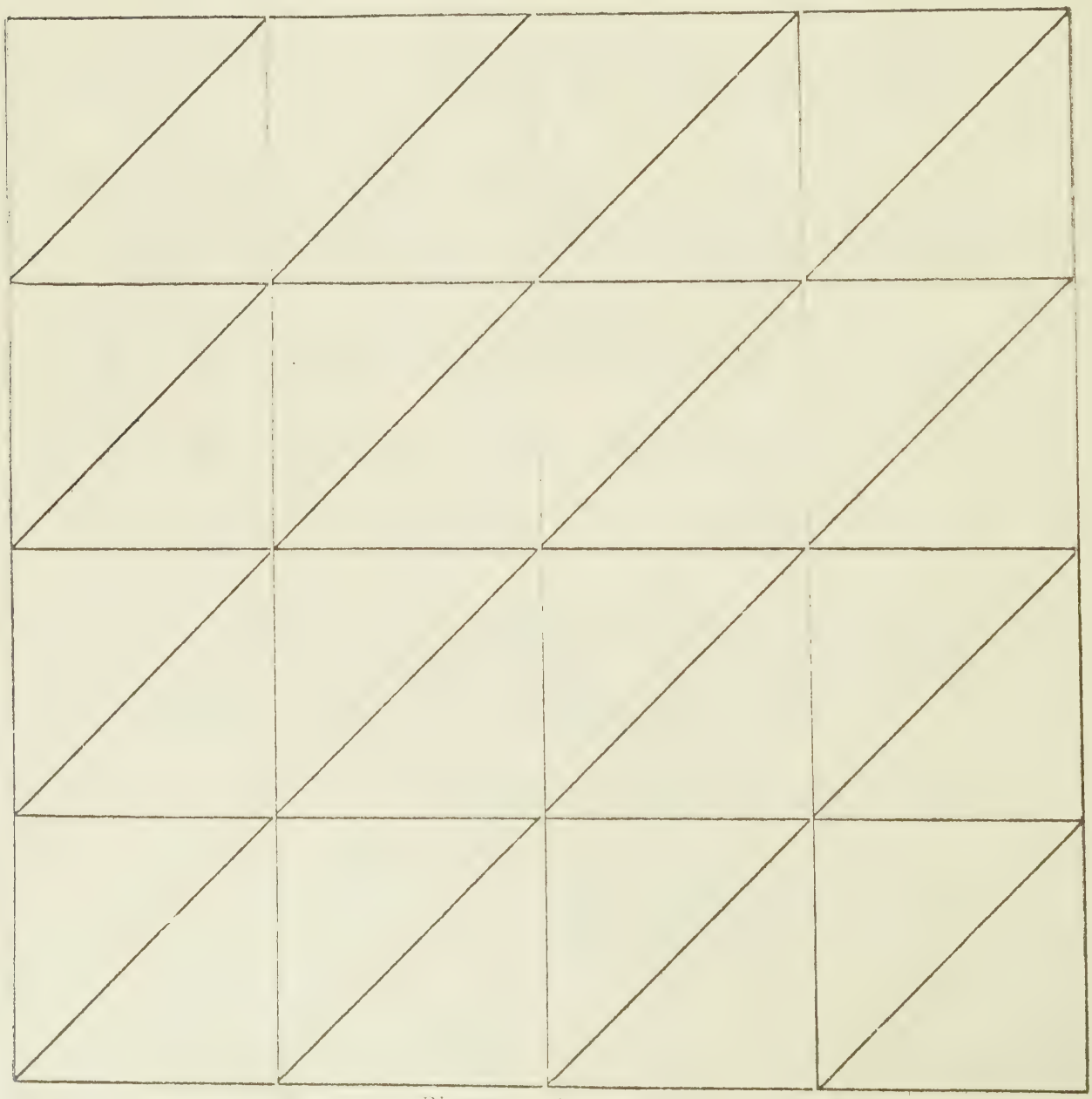
$$(1.21) \qquad e_h^y = \sup_{\substack{M \text{ noeud de} \\ \text{la triangulation}}} |u_h^y(M) - u^y(M)|$$

(1.22) $\epsilon_h = \max\ (e_h^x\ ,\ e_h^y)$

h désigne le pas de discrétisation et $\begin{pmatrix} u_h^x \\ u_h^y \end{pmatrix}$ la solution de l'équation approchée.

Résultats obtenus :

Le domaine Ω a été discrétisé à l'aide d'une triangulation du type de celle de la figure 4 avec des pas de discrétisation différents.



Nous n'avons pas utilisé la possibilité de construire une base de fonctions à divergence discrète nulle : cette contrainte a été introduite par dualité, le problème dual étant résolu à l'aide d'une méthode de gradient (algorithme d'Uzawa). Pour plus de détails voir FORTIN [7].

Le tableau ci-dessous donne l'erreur e_h obtenue pour $p = 0$ et avec deux pas de discrétisation différents.

32 triangles	0,42
128 triangles	0,13

La figure 5 donne les lignes de courant obtenues à partir de la solution correspondant au cas $h = \frac{1}{8}$

$2°/\ \psi = x^2(x-1)^2(y-1)^2\,y^2$

d'où $u_x = 2\,x^2y(x-1)^2(y-1)\,(2y-1)$

$$u = -\,2\,x\,y^2(x-1)\,(y-1)^2\,(2x-1)$$

et $f_x = -4(2y-1)\left[y(y-1)\,(6x^2-6x+1) + 3\,x^2(x-1)^2\right] + \frac{\partial p}{\partial x}$

$$f_y = 4(2x-1)\left[x(x-1)(6y^2-6y+1) + 3y^2(y-1)^2\right] + \frac{\partial p}{\partial y}$$

La méthode de résolution étant la même que précédemment, le tableau ci-dessous donne l'erreur obtenue pour $p = 0$ et avec trois pas de discrétisation différents.

32 triangles	0,002
128 triangles	0,0008
512 triangles	0,0003

La figure 6 donne les lignes de courant obtenue à partir de la solution calculée dans le cas $h = \frac{1}{8}$

Pour des résultats plus complets nous renvoyons à THOMASSET [17].

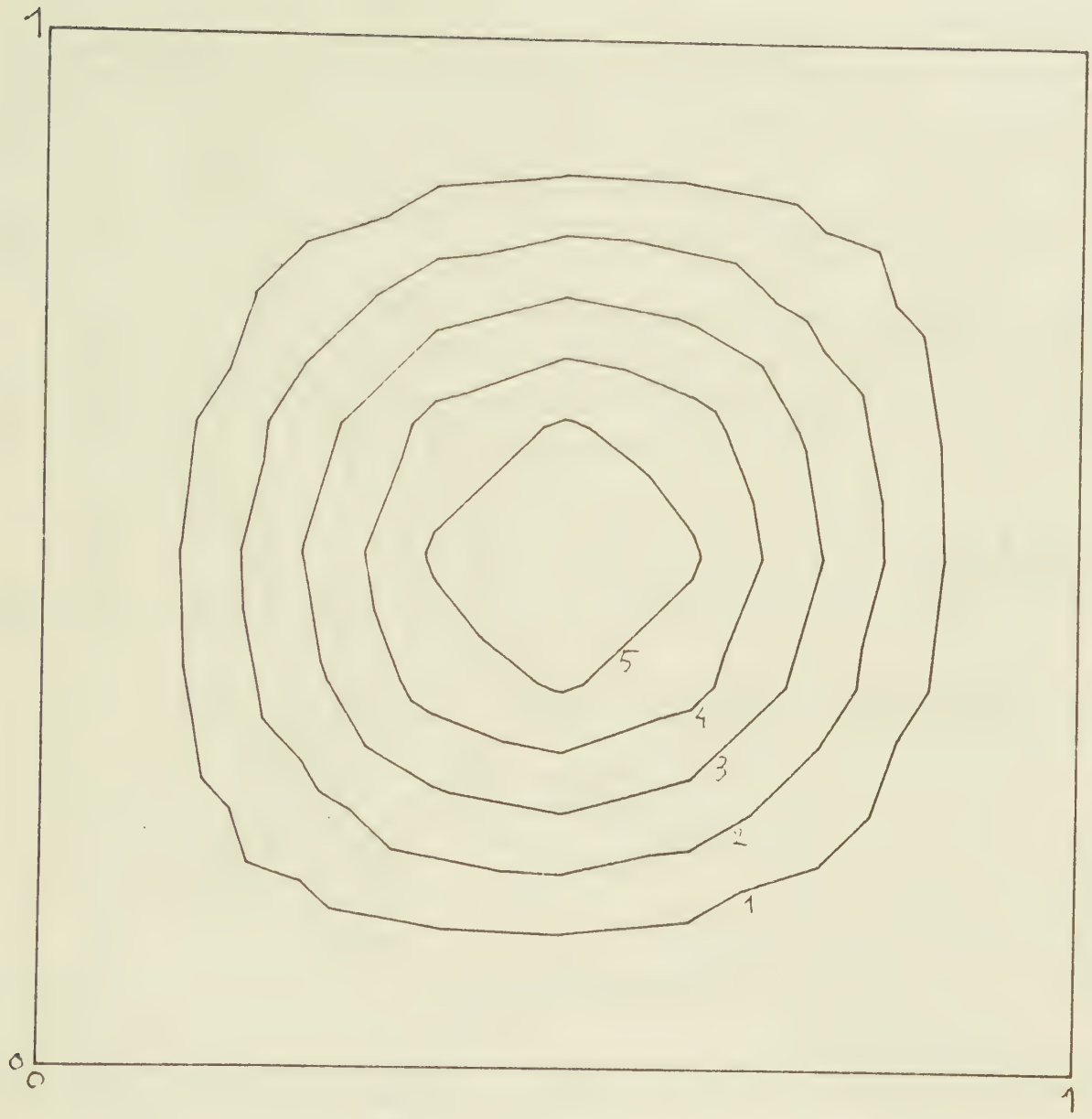


Figure 5

Lignes de courant obtenues à partir de la solution approchée

$$\psi = (\sin \pi x \ \sin \pi y)^2$$

Valeur de la fonction de courant sur les différentes lignes :

ligne 1 : 0.158

ligne 2 : 0.318

ligne 3 : 0.477

ligne 4 : 0.635

ligne 5 : 0.794

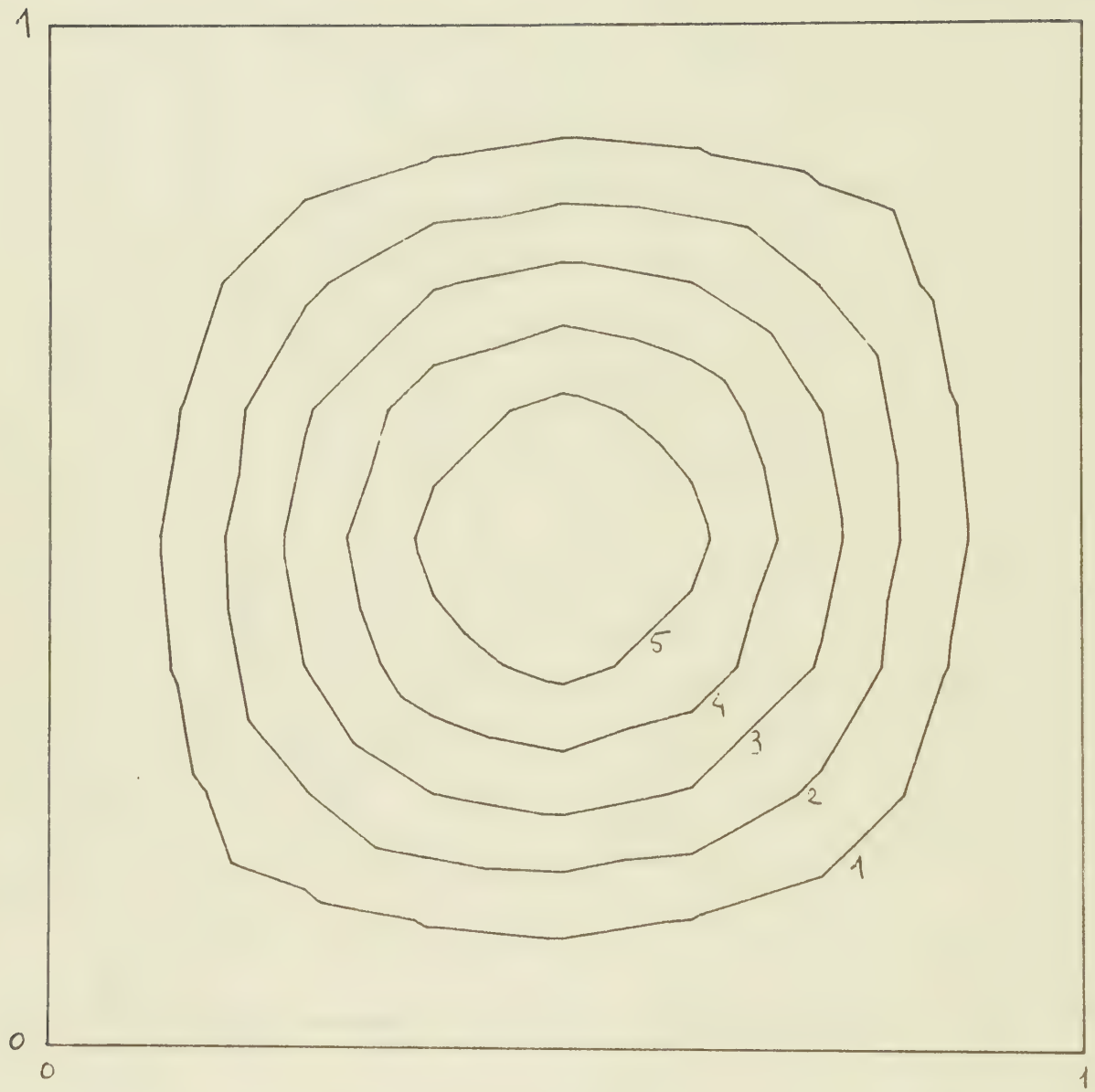


Figure 6

Lignes de courant obtenues à partir de la solution approchée

$$\psi = [x(x-1)\ y(y-1)]^2$$

Valeur de la fonction de courant sur les différentes lignes :

ligne 1 : 0.622 E-03

ligne 2 : 0.124 E-02

ligne 3 : 0.187 E-02

ligne 4 : 0.249 E-02

ligne 5 : 0.311 E-02

II - APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV RELATIFS A LA MESURE $r^{\alpha}drdz$ PAR DES ELEMENTS FINIS NON CONFORMES (cas $\alpha = 1$ ou $\alpha = 3$)

Le but de ce paragraphe est de montrer comment adapter la méthode des éléments finis non conformes pour l'approximation des problèmes dégénérés que l'on aura à résoudre. La différence avec le cas habituel (coordonnées cartésiennes, espaces de SOBOLEV classiques) est la suivante :

On sait que pour réaliser à l'aide d'éléments finis une approximation convergente (cf. CROUZEIX-RAVIART [5]) il faut vérifier le patch test de IRONS c'est-à-dire que :

- si $v_{h,1}$ et $v_{h,2}$ désignent la restriction d'un élément fini à deux triangles T_1 et T_2 ayant un côté K' en commun on a :

$$(2.1) \qquad \int_{K'} q(v_{h,1} - v_{h,2})\, d\sigma = 0 \qquad \forall\, q \in \text{espace } P_{k-1} \text{ des polynomes de degré } k-1 \text{ où } k \text{ est le degré des éléments finis considérés}$$

- si T_1 a un côté K' contenu dans la frontière de $\Omega(h)$

$$(2.2) \qquad \int_{K'} q\, v_{h,1}\, d\sigma = 0 \qquad \forall\, q \in P_{k-1}$$

(2.1) et (2.2) indiquent donc de prendre pour noeud dans le cas des éléments finis non conformes de degré 1 les milieux des côtés des triangles.

Dans notre cas un poids, spécifique de l'espace V_{α} considéré, va apparaître dans le patch test et par conséquent, déterminera l'emplacement des noeuds qu'il faudra définir pour avoir une approximation convergente. Ceci sera mis en évidence quand on examinera le problème de la consistance de l'approximation.

2.1 Définition de l'approximation

Soit Ω le domaine de R^2 (fig.7) vérifiant toujours l'hypothèse 1.9 du chapitre 1.

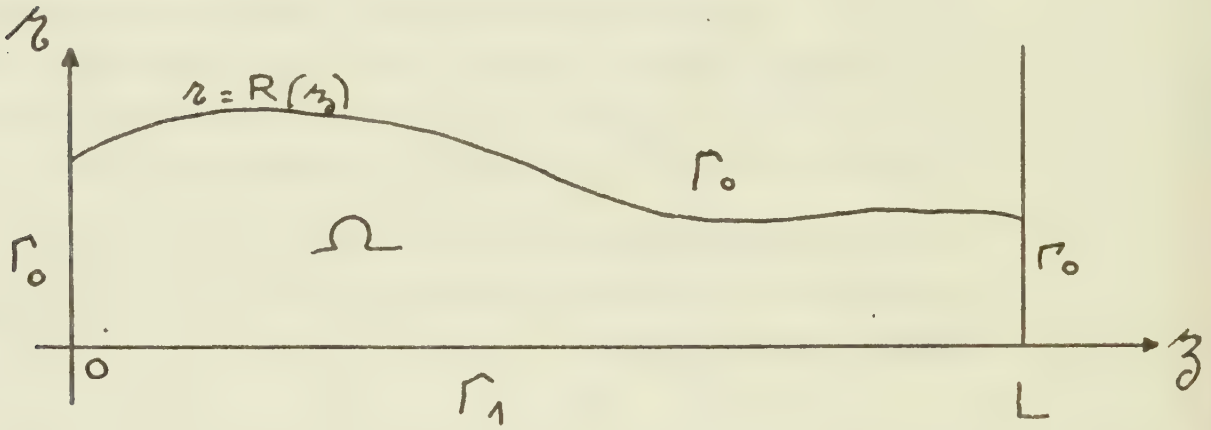


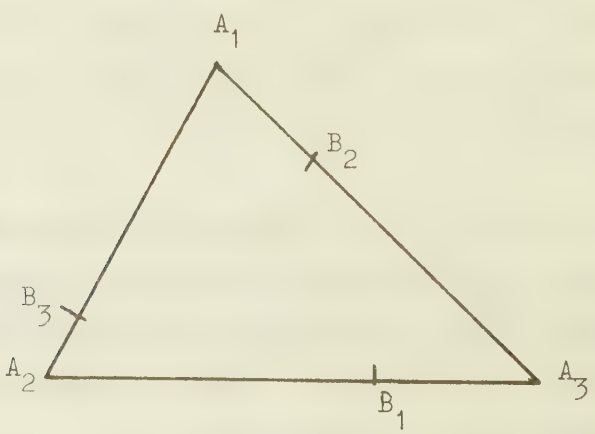
Figure : 7

On considère des triangulations $\mathcal{C}_h$ régulières (vérifiant (1.1) ..(1

Noeuds de la triangulation :

On ne définira les noeuds de la triangulation que lorsque des hypothèses faites sur la position de ces noeuds seront nécessaires pour assurer la convergence de l'approximation : le choix de ces noeuds sera alors cla

Pour le moment, à chaque côté de triangle on associe un noeud B_1 :



avec pour seule hypothèse

$$(2.3)\qquad \begin{cases} A_2 < B_1 < A_3 \\ A_1 < B_2 < A_3 \\ A_1 < B_3 < A_2 \end{cases}$$

Les inégalités ci-dessus signifient : compris strictement.

On appelle $u_{h\alpha}$ l'ensemble des noeuds intérieurs à $\Omega(h)$ et de ceux qui sont sur l'axe $r = 0$.

Proposition 2.1 Les vecteurs joignant un noeud d'un triangle aux deux autres noeuds sont linéairement indépendants.

Démonstration

Supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que :

$$(2.4)\qquad \vec{B_1B_2} + \lambda\ \vec{B_1B_3} = 0$$

Exprimons que B_2 est entre A_1 et A_3 :

$$(2.5)\qquad \vec{B_1B_2} = \lambda_2\ \vec{B_1A_1} + (1-\lambda_2)\ \vec{B_1A_3} \qquad 0 < \lambda_2 < 1$$

Exprimons que B_3 est entre A_1 et A_2

$$(2.6)\qquad \vec{B_1B_3} = \lambda_3\ \vec{B_1A_1} + (1-\lambda_3)\ \vec{B_1A_2} \qquad 0 < \lambda_3 < 1$$

D'où :

$$(2.7)\qquad (\lambda_2 + \lambda_3\ \lambda)\ \vec{B_1A_1} + (1-\lambda_2)\ \vec{B_1A_3} + \lambda(1-\lambda_3)\ \vec{B_1A_2} = 0$$

Exprimons que B_1 est entre A_2 et A_3 :

$$(2.8) \qquad B_1\vec{A}_1 = -\lambda_1 A_1\vec{A}_3 - (1-\lambda_1) A_1\vec{A}_2 \qquad 0 < \lambda_1 < 1$$

D'où :

$$B_1\vec{A}_3 = -(1-\lambda_1)(A_1\vec{A}_2 - A_1\vec{A}_3)$$

$$B_1\vec{A}_2 = \lambda_1(A_1\vec{A}_2 - A_1\vec{A}_3)$$

D'où en reportant dans (2.7) :

$$A_1\vec{A}_3 (-\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3\lambda) + (1-\lambda_2)(1-\lambda_1) - \lambda(1-\lambda_3)\lambda_1) +$$

$$A_1\vec{A}_2 (-(\lambda_2 + \lambda\lambda_3)(1-\lambda_1) - (1-\lambda_2)(1-\lambda_1) + \lambda(1-\lambda_3)\lambda_1) = 0$$

Comme $A_1\vec{A}_3$ et $A_1\vec{A}_2$ sont linéairement indépendants on en conclut que :

$\lambda_2 + \lambda\lambda_3 = 0$. On élimine $\lambda = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$:

$$(1-\lambda_2)(1-\lambda_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(1-\lambda_3)\lambda_1 = 0$$

Ce qui est impossible car tous ces termes sont > 0

■

<u>L'espace</u> $W_{h\alpha}$:

(2.9) $W_{h\alpha}$ = espace engendré par les vecteurs W_{hB}, $B \in \mathcal{U}_{h\alpha}$ définis par :

$$W_{uB}(B) = 1$$

$$W_{hB}(M) = 0 \qquad \text{si } M \neq B \qquad M \in \mathcal{U}_{h\alpha}$$

C'est encore l'espace des fonctions continues aux noeuds $B \in \mathcal{U}_{h\alpha}$

nulles aux noeuds de Γ_o et dont la restriction à chaque triangle est un polynome du premier degré.

Définissons :

$$\left.\begin{aligned} (2.10) \qquad D_{rh}\, u_h(x) &= \frac{\partial u_h(x)}{\partial r} \\ (2.11) \qquad D_{zh}\, u_h(x) &= \frac{\partial u_h(x)}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \forall\, x \in \Delta \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{C}_h$$

On munit $W_{h\alpha}$ du produit scalaire :

$$(2.12) \qquad \left[\!\left[u_h, v_h \right]\!\right]_{h\alpha} = (u_h, v_h)_\alpha + (D_{rh}\, u_h, D_{rh}\, v_h)_\alpha + (D_{zh}\, u_h, D_{zh} v_h)_\alpha$$

(analogue discret du produit scalaire dans $\mathcal{V}_\alpha$)

L'espace F_α et les opérateurs $\bar{\omega}_\alpha$ et $p_{h,\alpha}$

On prend :

$$(2.13) \qquad F_\alpha = H_\alpha^3$$

et $\bar{\omega}_\alpha$:

$$(2.14) \qquad u \in V_\alpha \rightarrow \bar{\omega}_\alpha\, u = \left(u, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \in F_\alpha$$

De même l'opérateur $p_{h\alpha}$ est défini par :

$$(2.15) \qquad u_h \in W_{h\alpha} \rightarrow p_{h\alpha}\, u_h = (u_h, D_{rh}\, u_h, D_{zh}\, u_h) \in F_\alpha$$

Les opérateurs p_h ont une norme égale à 1 et sont stables.

L'opérateur $r_{h\alpha}$:

$\mathcal{B}(\Omega)$ étant dense dans V_α on définit $r_{h\alpha}\, u = u_h$ pour $u \in \mathcal{B}(\Omega)$:

$$(2.16) \qquad u_h(B) = u(B) \qquad \forall\, B \in \mathcal{U}_{h\alpha}$$

2.2 Erreur d'interpolation :

Proposition 2.2. On a :

$$(2.17) \qquad \| p_{h\alpha}\, u_h - \varpi_\alpha\, u \|_{F_\alpha} \leq \mathcal{C}(u)\, m\, \rho(h) + \|u\|_{H^1_{r\alpha}} \, (\Omega - \Omega(h))$$

où m est défini en (1.4)

Démonstration

Si $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega(h)})$ on peut appliquer le résultat classique de la théorie de l'interpolation :

$$(2.18) \qquad \sup_{x \in \Delta} |u(x) - u_h(x)| \leq C\, \eta_2(u)\, \rho_\Delta^2$$

$$(2.19) \qquad \sup_{x \in \Delta} \left|\frac{\partial u}{\partial r}(x) - D_{rh}\, u_h(x)\right| \leq C\, \eta_2(u)\, \frac{\rho_\Delta^2}{\rho_\Delta}$$

$$(2.20) \qquad \sup_{x \in \Delta} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x) - D_{zh}\, u_h(x)\right| \leq C \eta_2(u)\, \frac{\rho_\Delta^2}{\rho_\Delta}$$

où $\eta_2(u) = \sup_{x \in \Delta} |D^2\, u(x)|$

($D^2\, u$ représente les dérivées secondes de u)

D'où l'on déduit le résultat. ∎

Proposition 2.3

$$p_{h\alpha}\, u_h \to \overline{\omega}_\alpha\, u \quad \text{dans} \quad F_\alpha \quad \text{quand} \quad h \to 0$$

2.3 Consistance de l'approximation : (cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$)

Il s'agit de vérifier que si $p_{h'\alpha}\ u_{h'} \to \varphi$ dans F_α faible alors $\varphi \in \varpi_\alpha\ V_\alpha$.

On va voir que ceci ne peut être vérifié que si l'on prend pour noeud les barycentres des côtés affectés d'un poids adéquat

Posons d'abord

(2.21) $\{\alpha/2\}$ = le plus petit entier $\geq \alpha/2$

i.e $\left\{\alpha/2\right\} = 1$ si $\alpha = 1$

$\left\{\alpha/2\right\} = 2$ si $\alpha = 3$

Proposition 2.4 (Consistance de l'approximation).

(2.22) Si $p_{h',\alpha}\ u_{h'} \to \varphi$ dans F_α faible alors $\varphi \in \bar{\omega}_\alpha\ V_\alpha$

à condition que la condition suivante soit vérifiée :

(2.23) Les noeuds de la triangulation sont les barycentres des côtés pondérés par $r^{\{\alpha/2\}}$

Sur l'axe $r = 0$ on prend comme noeud les milieux des côtés des triangles.

La démonstration reprend cette utilisée dans TEMAM [15] pour les espaces de Sobolev classiques. Dans notre cas la démonstration est longue et technique ; elle est cependant intéressante car elle va montrer ce que devient le patch-test et par conséquent déterminera l'emplacement des noeuds comme indiqué précédemment.

Donnons d'abord une esquisse de cette démonstration :

On sait que :

$$(2.24) \qquad (u_{h'}, D_{rh'}, u_{h'}, D_{zh'}, u_{h'}) \to (\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2)$$

dans F_α faible.

Il s'agit de montrer que φ_1 et φ_2 sont les dérivées de φ_o. On va procéder de la manière suivante :

- 1ère étape (lemme 2.1 si $\alpha = 1$ et 2.2 si $\alpha = 3$)

On va montrer que

$$u_{h'} \to \varphi_o \quad \text{dans } H_{\alpha-1} \text{ faible}$$

- 2ème étape . On se ramène à des convergences dans $L^2(\Omega)$ faible

on saura alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^{\{\alpha/2\}-1} u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}-1} \varphi_o \\ r^{\{\alpha/2\}} D_{rh'} u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}} \varphi_1 \\ r^{\{\alpha/2\}} D_{zh'} u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}} \varphi_2 \end{array} \right\} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^{\{\alpha/2\}-1} u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}-1} \varphi_o \\ D_{rh'}(r^{\{\alpha/2\}} u_{h'}) \to r^{\{\alpha/2\}} \varphi_1 + r^{\{\alpha/2\}-1} \varphi_o \\ D_{zh'}(r^{\{\alpha/2\}} u_{h'}) \to r^{\{\alpha/2\}} \varphi_2 \end{array} \right\} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

Le problème qui apparaît est alors du même type que dans le cas des espaces de Sobolev habituels : il s'agit de voir que :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r^{\{\alpha/2\}}\varphi_o) &= r^{\{\alpha/2\}}\,\varphi_1 + r^{\{\alpha/2\}-1}\,\varphi_o \\ \frac{\partial}{\partial z}(r^{\{\alpha/2\}}\varphi_o) &= r^{\{\alpha/2\}}\,\varphi_2 \end{aligned}\right\} \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)$$

ce que l'on fait, de manière classique :

3ème étape (lemmes 2.3, 2.4, 2.5, 2.6)

On estime

$$\int_{\Omega(h)}\left(D_{zh}(r^{\{\alpha/2\}}\,u_h)\,\mathcal{O} + r^{\{\alpha/2\}}\,u_h\,\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial z}\right)\,drdz \text{ et}$$

$$\int_{\Omega(h)}\left(D_{rh}(r^{\{\alpha/2\}}\,u_h)\,\mathcal{O} + r^{\{\alpha/2\}}\,u_h\,\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial r}\right)\,drdz$$

Et on montre que ces deux expressions tendent vers 0 quand

$$h \to 0 \quad \forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

Cette estimation n'est possible que si les éléments finis vérifient un patch test adéquat (2.36), (2.37).

Démonstration de la proposition 2.4

1ère étape

On va distinguer, pour la première étape, les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$

1°/ $\alpha = 1$

Lemme 2.1

Avec les hypothèses (2.23) et (2.24) on a :

$$u_{h'} \to \varphi_o \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ faible}$$

Démonstration

Comme on le verra à la proposition 2.6, l'hypothèse (2.23) permet d'établir :

$$(2.25) \quad \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta u_{h'}^2 \, drdz \leqslant C(\Omega) \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta r\left(|u_{h'}|^2 + \left|\frac{\partial u_{h'}}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial u_{h'}}{\partial r}\right|^2\right) drdz$$

Donc $u_{h'}$ est dans un borné de $L^2(\Omega)$

Il existe par conséquent une sous suite $u_{h'_n}$ qui converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers φ.

Montrons que $\varphi = \varphi_o$

$u_{h'_n}$ converge faiblement dans $L^2_{r\,drdz}(\Omega) = H_1$ (puisque $L^2(\Omega) \subset H_1$ avec densité et injection continue) vers φ. D'où $\varphi = \varphi_o$.

En extrayant d'autres sous suites on vérifie que, la limite de toutes les sous suites étant la même, la suite entière converge.

■

2°/ $\alpha = 3$

Lemme 2.2

Avec les hypothèses (2.23) et (2.24) on a :

$$u_{h'} \to \varphi_o \quad \text{dans} \quad H_2 \text{ faible}$$

Démonstration

Comme on le verra à la proposition 2.6, l'hypothèse (2.23) permet d'établir :

$$(2.26)\quad \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_{\Delta} r^2 \; u_{h'}^2 \, drdz \leq C(\Omega) \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_{\Delta} r^3 \left(u_{h'}^2 + \left(\frac{\partial u_{h'}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{h'}}{\partial z}\right)^2\right) drdz$$

Donc $u_{h'}$ est dans un borné de H_2

Il existe donc une sous suite $u_{h'n}$ qui converge faiblement dans H_2 vers φ.

Montrons que $\varphi = \varphi_o$

$u_{h'_n}$ converge faiblement vers φ dans H_3 (puisque $H_2 \subset H_3$ avec densité et injection continue). D'où $\varphi = \varphi_o$.

En extrayant d'autres sous suites on vérifie que, la limite de toutes les sous suites étant la même, la suite entière converge.

■

2ème étape

A l'aide des résultats des lemmes 2.1 et 2.2, (2.24) peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^{\{\alpha/2\}-1} \; u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}-1} \; \varphi_o \\ r^{\{\alpha/2\}} \; D_{rh'} u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}} \varphi_1 \\ r^{\{\alpha/2\}} \; D_{zh'} u_{h'} \to r^{\{\alpha/2\}} \; \varphi_2 \end{array} \right. \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Prolongeons par 0 les fonctions précédentes à l'espace R^2 entier et désignons par $\widetilde{\ }$ les fonctions prolongées. Alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}-1}\, u_{h'}} \to r^{\{\alpha/2\}-1}\, \varphi_o \\ \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, D_{rh'}\, u_{h'}} \to r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_1 \\ \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, D_{zh'}\, u_{h'}} \to r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_2 \end{array}\right. \quad \text{dans } L^2(R^2) \text{ faible}$$

Si on montre que :

$$(2.27) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial r}\widetilde{(r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_o)} = \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_1} + \widetilde{r^{\{\alpha/2\}-1}\, \varphi_o} \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\widetilde{(r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_o)} = \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_2} \end{array}\right.$$

on pourra en déduire que $\widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_o} \in H_1(R^2)$ et que $r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_o \in H_o^1(\Omega)$.

D'où l'on conclura :

$$\varphi_o \in V_\alpha \quad \text{et, dans } \Omega,\ \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_o}{\partial r} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_o}{\partial z}$$

Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{D}(R^2)$. Alors :

$$\int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, u_h}\, \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial r}\, dr dz \to \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_o}\, \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial r} = - < \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{(r^{\{\alpha/2\}}\, \varphi_o)}, \mathcal{O} >$$

$$\int_{R^2} D_{rh}\widetilde{(r^{\{\alpha/2\}}\, u_h)}\, \mathcal{O}\, dr dz = \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}\, D_{rh}\, u_h}\, \mathcal{O}\, dr dz + \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}-1} u_h}\, \mathcal{O}\, dr dz$$

$$\to \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}} \varphi_1}\, \mathcal{O}\, dr dz + \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}-1} \varphi_o}\, \mathcal{O}\, dr dz$$

On aura montré la première partie de (2.27) si on montre que :

$$(2.28) \qquad \int_{R^2} (D_{rh}(\widetilde{r^{\{\alpha/2\}}u_h})\,\mathcal{O} + \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,u_h\,\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial r})\,drdz \to 0$$

quand $\rho(h) \to 0$

D'autre part :

$$\int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,u_h\,\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial z}\,drdz \to \int \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,\varphi_o\,\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial z}\,drdz = -\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\,(\widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,\varphi_o), \mathcal{O} \right\rangle$$

$$\int_{R^2} D_{zh}(\widetilde{r^{\{\alpha/2\}}u_h})\,\mathcal{O}\,drdz = \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,D_{zh}\,u_h\,\mathcal{O}\,drdz \to \int_{R^2} \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,\varphi_2\,\mathcal{O}\,drdz$$

Pour montrer la deuxième partie de (2.27) il suffit de montrer que

$$(2.29) \qquad \int_{R^2} (D_{zh}(\widetilde{r^{\{\alpha/2\}}u_h})\,\mathcal{O} + \widetilde{r^{\{\alpha/2\}}}\,u_h\,\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial z})\,drdz \to 0 \text{ quand } \rho(h) \to 0$$

Il s'agit maintenant de trouver une estimation des expressions apparaissant dans (2.28) et (2.29) permettant de conclure (2.28) et (2.29).

3ème étape

Lemme 2.3

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $u_h \in W_{h,\alpha}$ et définissons

$$\sigma^{r}_{h,\alpha} = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\{\alpha/2\}}\, u_h\, \varphi\right) dr\,dz \tag{2.30}$$

$$\sigma^{z}_{h,\alpha} = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int \frac{\partial}{\partial z}\left(r^{\{\alpha/2\}}\, u_h\, \varphi\right) dr\,dz \tag{2.31}$$

$$\eta_1(\varphi) = \max_{x=r,z} \sup_{X \in \bar{\Omega}} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right|$$

Alors, si les noeuds sont définis par (2.23) on a les estimations :

$$\sigma^{r}_{h,\alpha} \leq C(\alpha, \Omega)\, m\, \rho(h)\eta_1(\varphi) \left[\!\left[u_h \right]\!\right]_{h,\alpha} \tag{2.32}$$

$$\sigma^{z}_{h,\alpha} \leq C(\alpha, \Omega)\, m\, \rho(h)\eta_1(\varphi) \left[\!\left[u_h \right]\!\right]_{h,\alpha} \tag{2.33}$$

Remarque. On peut vérifier, en décomposant les dérivées, que les expressions (2.30) et (2.31) ont un sens.

La démonstration de ce lemme va faire l'objet des trois lemmes suivants .

Posons

$$\sigma^{x}_{h,\alpha} = \sigma^{r}_{h,\alpha} \text{ (resp } \sigma^{z}_{h,\alpha}) \text{ avec } x = r \text{ (resp } x = z) \tag{2.34}$$

Lemme 2.4

$$\sigma^{x}_{h,\alpha} = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^{\dagger}\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}\, u_h\, \varphi\, \nu_{x,\Delta'}\, d\Gamma \tag{2.35}$$

avec $\partial^{\dagger}\Delta$ = ensemble des côtés de Δ.

et $\nu_{x,\Delta'}$ = composante en x du vecteur normal unitaire extérieur à Δ'

Démonstration

En appliquant la formule de Stokes . généralisée on obtient :

$$\int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x}(r^{\{\alpha/2\}} u_h \varphi) dr dz = \sum_{\Delta' \in \partial\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} u_h \varphi \, \nu_{x,\Delta'} \, d\Gamma$$

D'où le résultat en sommant pour $\Delta \in \mathcal{C}_h$.

Remarque importante . Conformément à CROUZEIX-RAVIART [5] il est maintenant clair que l'estimation de (2.35) ne pourra être faite que si les éléments finis satisfont le patch-test de IRONS qui prend alors la forme suivante pour les éléments finis de degré 1:

1°/ Pout tout côté Δ' intérieur à $\Omega(h)$ qui sépare deux triangles Δ_1 et $\Delta_2 \in \mathcal{C}_h$ on a :

(2.36) $$\int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}(u_{h,1} - u_{h,2}) \, d\Gamma = 0 \qquad \forall\, u_h \in W_h$$

où $u_{h,1}$ (resp $u_{h,2}$) désigne la restriction de u_h à Δ_1(resp Δ_2)

2°/ Pour tout côté Δ' d'un triangle $\Delta \in \mathcal{C}_h$ tel que Δ' appartienne à la frontière de $\Omega(h)$ on a :

(2.37) $$\int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} u_h \, d\Gamma = 0 \quad \text{pour tout} \quad u_h \in W_h$$

Ce patch-test nous amène alors à prendre comme noeuds ceux définis par (2.23). Dans ce cas on a :

(2.38) $$\int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} u_h \, d\Gamma = u_h(B) \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} d\Gamma \qquad \forall\, \Delta' \text{ côté de } \Delta \in \mathcal{C}_h \quad \forall\, u_h \in W_h$$

où B est le noeud de Δ' défini par (2.23)

Lemme 2.5

$$(2.39)\qquad \sigma^{x}_{h,\alpha} = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial \Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}(u_h(x)-u_h(B))(\varphi(x) - \varphi(B))\nu_{x,\Delta'}\, d\Gamma$$

B est le barycentre pondéré de Δ'

Démonstration

Montrons d'abord que

$$(2.40)\qquad \sigma^{x}_{h,\alpha} = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^{+}\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}(u_h(x)-u_h(B))\, \varphi(x)\, \nu_{x,\Delta'}\, d\Gamma$$

Il suffit de montrer que :

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^{+}\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} u_h(B)\varphi(x)\nu_{x,\Delta'}\, d\Gamma = 0$$

Pour tout côté Δ' contenu dans la frontière de $\Omega(h)$, $r^{\{\alpha/2\}} u_h(B) = 0$ si bien que la contribution de ce côté dans la somme est nulle.

Si Δ' appartient à deux triangles adjacents, Δ' intervient deux fois dans la somme avec des valeurs opposées, si bien que la somme totale est nulle.

Pour montrer (2.39) à partir de (2.40) il suffit de montrer que :

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^{+}\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}(u_h(x) - u_h(B))\varphi(B)\nu_{x,\Delta'}\, d\Gamma = 0$$

ce qui est évident car chaque terme de la somme est nul d'après (2.38)

■

Démonstration du lemme 2.3

$$(2.41)\quad |\sigma^x_{h,\alpha}| \leq \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} |u_h(x) - u_h(B)|\,|\varphi(x) - \varphi(B)|\,|\nu_{x,\Delta'}|\,d\Gamma$$

On a

$$|\nu_{x,\Delta'}| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\varphi(x) - \varphi(B) \leq \eta_1(\varphi)\,\rho_\Delta \quad \forall\, x \in \Delta'$$

Donc

$$|\sigma^x_{h,\alpha}| \leq \eta_1(\varphi) \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \rho_\Delta \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}} |u_h(X) - u_h(B)|\, d\Gamma$$

or $\quad u_h(X) - u_h(B) = \dfrac{\partial u_h}{\partial r}(r - r_B) + \dfrac{\partial u_h}{\partial z}(z - z_B)$

où $\begin{pmatrix} z_B \\ r_B \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de B

Donc $|u_h(x) - u_h(B)| \leq 2\,\rho_\Delta \left(\left|\dfrac{\partial u_h}{\partial r}\right| + \left|\dfrac{\partial u_h}{\partial z}\right|\right), x \in \Delta'$

D'où en reportant dans (2.41):

$$(2.42)\quad |\sigma^x_{h,\alpha}| \leq C\eta_1(\varphi) \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \rho_\Delta^2 \left(\left|\frac{\partial u_h}{\partial r}\right| + \left|\frac{\partial u_h}{\partial z}\right|\right)\left(\sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}\, d\Gamma\right)$$

Admettons provisoirement le

Lemme 2.6

$\forall\, \Delta \in \mathcal{C}_h$ on a :

$$(2.43)\qquad \rho_\Delta \int_{\Delta'} r^{\{\alpha/2\}}\, d\Gamma \leq C(m,\alpha)\, m \int_\Delta r^{\{\alpha/2\}}\, dr\,dz$$

où m est défini en (1.4)

Donc, moyennant (2.43), (2.42) devient :

$$|\mathcal{C}^{x}_{h,\alpha}| \leq C(\alpha)\eta_1(\varphi)m \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \rho_\Delta \int_\Delta \left(\left|\frac{\partial u_h}{\partial r}\right| + \left|\frac{\partial u_h}{\partial z}\right|\right) r^{\{\alpha/2\}} drdz$$

$$\leq C(\alpha)m\ \eta_1(\varphi)\rho(h) \int_\Omega r^{\{\alpha/2\}} (|D_{rh}\ u_h| + |D_{zh}\ u_h|)\ drdz$$

$$\leq C(\alpha,\Omega)\ m\ \eta_1(\varphi)\rho(h)\ \left[\!\left[u_h\right]\!\right]_{h,\alpha}$$

D'où les résultats (2.32) et (2.33)

■

Démonstration du lemme 2.6

En changeant de notation (2.43) revient à démontrer que :

$$\forall\ \Delta \in \mathcal{C}_h \quad \rho_\Delta \int_{\Delta'} r^p\ d\Gamma \leq C(m,p)\ m \int_\Delta r^p\ drdz \quad \forall\ p \in N$$

On va démontrer cette inégalité par récurrence

1°/ $p = 0$

$$\int_\Delta drdz = \frac{\xi}{2} \int_{\Delta'} d\Gamma$$

où ξ est la hauteur de Δ perpendiculaire à Δ'

d'où

$$\int_{\Delta'} d\Gamma \leq \frac{2}{\rho_\Delta} \int_\Delta drdz \qquad \forall\ \Delta \in \mathcal{C}_h$$

2°/ Supposons que l'on ait :

$$(2.44) \qquad \forall \Delta \in \mathcal{C}_h \qquad \rho_\Delta \int_{\Delta'} r^p \, d\Gamma \leqslant C(m,p)m \int_\Delta r^p \, drdz$$

et désignons par r_{B_p} (resp r_{M_p}) l'ordonnée du point B_p (resp M_p) barycentre de Δ (resp de Δ') pondéré par r^p.

Alors

$$\int_\Delta r^{p+1} \, drdz = r_{B_p} \int_\Delta r^p \, drdz$$

$$\int_{\Delta'} r^{p+1} \, d\Gamma = r_{M_p} \int_{\Delta'} r^p \, d\Gamma$$

D'où :

$$(2.45) \qquad \int_{\Delta'} r^{p+1} \, d\Gamma = \frac{r_{M_p}}{r_{B_p}} \frac{\int_{\Delta'} r^p \, d\Gamma}{\int_\Delta r^p \, drdz} \int_\Delta r^{p+1} \, drdz$$

On va majorer $\dfrac{r_{M_p}}{r_{B_p}}$

- si Δ n'a pas de sommet sur l'axe $r = 0$ alors

$$\frac{r_{M_p}}{r_{B_p}} \leqslant \frac{r_{\text{sommet de } \Delta \text{ le plus haut}}}{r_{\text{sommet de } \Delta \text{ le plus bas}}} \leqslant 1 + \frac{\rho_\Delta}{\rho'_\Delta} = 1 + m$$

- si Δ a un sommet sur l'axe $r = 0$ on peut vérifier que

$$\frac{r_{M_p}}{r_{B_p}} \leqslant \frac{p+3}{p+1}$$

En résumé

$$\frac{r_{M_p}}{r_{B_p}} \leqslant \max\left(1+m, \frac{p+3}{p+1}\right) \tag{2.46}$$

Compte tenu de (2.44) et (2.46), (2.45) devient :

$$\int_{\Delta'} r^{p+1} \, d\Gamma \leqslant C(m,p)\, m \int_{\Delta} r^{p+1} \, drdz$$

Conclusion :

Proposition 2.5

L'approximation externe de V_α par $W_{h\alpha}$ ainsi définie est convergente

2.4. Inégalité de Poincaré discrète

Définissons sur W_h la semi-norme

$$\|u_h\|_{h,\alpha} = \left(|D_{rh}\, u_h|_\alpha^2 + |D_{zh}\, u_h|_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.47}$$

Proposition 2.6

$$\text{(2.48)} \quad \begin{cases} \text{Pour } \alpha = 1 \text{ on a} \\ \int_\Omega u_h^2 \, drdz \leqslant C(m,\Omega)\, \|u_h\|_{h,1}^2 \qquad \forall\, u_h \in W_{h,1} \\ \text{Pour } \alpha = 3 \text{ on a :} \\ \int_\Omega r^2 u_h^2 \, drdz \leqslant C(m,\Omega)\, \|u_h\|_{h,3}^2 \qquad \forall\, u_h \in W_{h,3} \end{cases}$$

Démonstration

On va distinguer les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$

1°/ $\alpha = 1$

Montrons que

$$(2.49) \quad \left| \int_{\Omega} u_h \varphi \, drdz \right| \leq C(\Omega) |\varphi|_o \, ||u_h||_{h,1} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On en déduira la même inégalité $\forall \varphi \in H_o = L^2(\Omega)$ d'où (2.48)

. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Soit X solution de

$$(2.50) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial X}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial X}{\partial z}\right) = \varphi \quad \text{dans } \Omega \\ X \in V_1 \end{cases}$$

Multiplions (2.50) par u_h et intégrons sur Δ. Alors, en appliquant la formule de Green (proposition 2.14 chapitre 1) il vient :

$$(2.51) \quad \int_{\Delta} u_h \varphi \, drdz = \int_{\Delta} r \left(\frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial u_h}{\partial r} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial u_h}{\partial z}\right) drdz + \int_{\partial\Delta} r \, u_h \frac{\partial X}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma$$

Posons

$$(2.52) \qquad \mathcal{O}_h = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial \Delta} r\, u_h \frac{\partial X}{\partial n}\, d\Gamma$$

On a alors

$$(2.53) \qquad \left| \int_{\Omega} u_h \varphi \, drdz \right| \leq ||u_h||_{h,1} ||X||_0 + |\mathcal{O}_h|$$

Or (cf ZUILY [18]) si $\varphi \in L^2(\Omega)$ alors $X \in H^1(\Omega) \cap H^2_{r^2 drdz}$ et

$$(2.54) \qquad ||X||_0^2 + ||r\, D^2 X||_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) ||\varphi||_{L^2(\Omega)}$$

ou $D^2 X$ représente les dérivées secondes de X.

On a même $X \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Donc :

$$\left| \int_{\Omega} u_h \varphi \, drdz \right| \leq ||u_h||_{h,1} ||X||_{H^1(\Omega)} + |\mathcal{O}_h|$$

$$\leq C(\Omega)\, ||u_h||_{h,1} ||\varphi||_{L^2(\Omega)} + |\mathcal{O}_h|$$

$$\leq C(\Omega)\, ||u_h||_{h,1} |\varphi|_0 + |\mathcal{O}_h|$$

Il reste à majorer $|\mathcal{O}_h|$ par une expression du type $C\, ||u_h||_{h,1} |\varphi|_0$

Cette estimation va faire l'objet des 3 lemmes suivants

Lemme 2.7

$$\mathcal{O}_h = \mathcal{O}_h^r + \mathcal{O}_h^z$$

avec :

$$(2.55)\quad \mathcal{O}_h^r = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+ \Delta} \int_{\Delta'} r(u_h(x)-u_h(B))(X_r(x)-X_r(B))\nu_{r,\Delta'}\, d\Gamma$$

$$(2.56)\quad \mathcal{O}_h = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+ \Delta} \int_{\Delta'} r(u_h(x)-u_h(B))(X_z(x)-X_z(B))\nu_{z,\Delta'}\, d\Gamma$$

où $X_r = \frac{\partial X}{\partial r}$ et $X_z = \frac{\partial X}{\partial z}$

et B désigne le barycentre de Δ' avec le poids r

Ceci est la conséquence immédiate du lemme 2.5

Lemme 2.8

$$(2.57)\quad |\mathcal{O}_h^r| \leq C \sqrt{\alpha\, \rho(h)}\, \|u_h\|_{h,1} \Big(\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+ \Delta} \int_{\Delta'} r(X_r(x)-X_r(B))^2 \, d\Gamma \Big)^{\frac{1}{2}}$$

inégalité du même type pour $|\mathcal{O}_h^z|$

Démonstration

$$u_h(x)-u_h(B) = \frac{\partial u_h}{\partial r}(r-r_B) + \frac{\partial u_h}{\partial z}(z-z_B)$$

où z_B et r_B désignent les coordonnées de B.

$$|u_h(x)-u_h(B)| \leq 4\, \rho_\Delta |\text{grad } u_h|$$

$$\Big| \int_{\Delta'} r(u_h(x)-u_h(B))(X_r(x)-X_r(B)) \nu_{r,\Delta'}\, d\Gamma \Big| \leq$$

$$4\, \rho_\Delta \Big(\int_{\Delta'} r |\text{grad } u_h|^2\, d\Gamma \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Delta'} r |X_r(x)-X_r(B)|^2\, d\Gamma \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{\Delta'} r |\text{grad } u_h|^2\, d\Gamma = |\text{grad } u_h|^2 \int_{\Delta'} r\, d\Gamma$$

A l'aide du lemme 2.6 on peut majorer $\int_{\Delta'} r\, d\Gamma$ et obtenir

$$\int_{\Delta'} r|\text{grad } u_h|^2 \, d\Gamma \leq \frac{C}{\rho'_\Delta} \int_\Delta |\text{grad } u_h|^2 \, r \, drdz$$

et

$$|\sigma_h^r| \leq C \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \frac{\rho_\Delta}{\sqrt{\rho'_\Delta}} \left(\int_\Delta |\text{grad } u_h|^2 r \, drdz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Delta'} |X_r(x) - X_r(B)|^2 r d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}}$$

■

D'où le résultat.

Lemme 2.9

$$(2.58) \quad \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \int_{\Delta'} r(X_r(x) - X_r(B))^2 \, d\Gamma \leq C(m,\Omega) |\varphi|_0^2$$

inégalité du même type avec X_z

Démonstration

Posons $\sigma(x) = X_r(x) - X_r(B) \qquad x \in \Delta$

$$\sigma \in \mathcal{V}_2(\Delta) \cap L^2(\Delta) \qquad \text{(cf. ZUILY [18])}$$

Donc $r^{\frac{1}{2}} \sigma \in \mathcal{V}_1(\Delta) \cap L^2_{\frac{1}{r} drdz}(\Delta)$ et (cf proposition 6.4 chap.1)

on a :

$$\int_{\Delta'} r \sigma^2 \, d\Gamma \leq C(\Delta) \left(\int_\Delta r^2 \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2 \right) drdz + \int_\Delta \sigma^2 \, drdz \right)$$

$$\int_\Delta r \sigma^2 \, d\Gamma \leq C(\Delta) \left(||r D^2 X||^2_{L^2(\Delta)} + ||X||^2_{H^1(\Delta)} \right)$$

où D^2X représente les dérivées secondes de X

On peut vérifier en passant par un triangle de référence (cf la démonstration faite dans le cadre habituel dans TEMAM [15]) que l'on peut majorer $C(\Delta)$ par :

$$C(\Delta) \leq C(m,\Omega) \qquad \forall \Delta \in \mathcal{C}_h$$

Si bien que :

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^* \Delta} \int_{\Delta'} r(X_r(x)-X_r(B))^2 \, d\Gamma \leq C(m,\Omega) \left(||rD^2X||^2_{L^2(\Omega)} + ||X||^2_{H^1(\Omega)} \right)$$

$$\leq C(m,\Omega) \, ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}$$

(d'après ZUILY [18])

$$\leq C(m,\Omega) \, |\varphi|^2_0$$

$2°/\ \alpha = 3$ On va montrer que

$$\int_\Omega r^{\frac{1}{2}} u_h \varphi \, drdz \leq C(\Omega) \| u_h|_{h,3} |\varphi|_{-1} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_1(\Omega)$$

D'où la même inégalité pour tout $\varphi \in H_{-1}$ et $|r^{\frac{1}{2}} u_h|_1 \leq C(\Omega) \|u_h\|_{h,3}$ d'où le résultat.

Soit X solution de :

$$(2.60) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial X}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \frac{\partial X}{\partial z}) = r^{\frac{1}{2}} \varphi & \text{dans } \Omega \\ X \in V_2 \end{cases}$$

Multiplions (2.60) par u_h et intégrons Δ. Alors, en appliquant la formule de Green (proposition 2.14 chapitre 1) il vient :

$$\int_\Delta r^{\frac{1}{2}} u_h \varphi \, drdz = \int_\Delta r^2 \left(\frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial u_h}{\partial r} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial u_h}{\partial z} \right) drdz + \int_{\partial\Delta} r^2 u_h \frac{\partial X}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma$$

(2.61) Posons $\mathcal{O}_h = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial\Delta} r^2 u_h \frac{\partial X}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma$

D'après ZUILY [18] si $r^{\frac{1}{2}} \varphi \in L^2_{\frac{1}{r^2}\,drdz}$ alors $X \in H^1(\Omega) \cap H^2_{r^2\,drdz}$

et

$$(2.62)\quad ||X||_{H^1(\Omega)} + ||rD^2X||_{L^2(\Omega)} \leqslant c\,|\varphi|_{-1}$$

où D^2X représente les dérivées secondes de X.

$$\left|\int_\Omega r^{\frac{1}{2}} u_h\, \varphi\, drdz\right| \leqslant ||u_h||_{h,3}\, ||X||_1 + |\mathcal{O}_h|$$

$$\leqslant ||u_h||_{h,3} ||X||_{H^1(\Omega)} + |\mathcal{O}_h|$$

$$\leqslant ||u_h||_{h,3} |\varphi|_{-1} + |\mathcal{O}_h|$$

Il reste à majorer $|\mathcal{O}_h|$ par une expression du type $c\,||u_h||_{h,3}|\varphi|_{-1}$

Cette estimation va faire l'objet des 3 lemmes suivants.

Lemme 2.10

$\mathcal{O}_h = \mathcal{O}_h^r + \mathcal{O}_h^z$ avec :

$$(2.63)\quad \mathcal{O}_h^r = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \int_{\Delta'} r^2 (u_h(x)-u_h(B))(X_r(x)-X_r(B))\nu_{r,\Delta'}\, d\Gamma$$

$$(2.64)\quad \mathcal{O}_h^z = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \int_{\Delta'} r^2 (u_h(x)-u_h(B))(X_z(x)-X_z(B))\nu_{z,\Delta'}\, d\Gamma$$

où $X_r = \dfrac{\partial X}{\partial r}$ et $X_z = \dfrac{\partial X}{\partial z}$

et B désigne le barycentre de Δ' avec le poids r^2.

Ceci est la conséquence immédiate du lemme 2.5

Lemme 2.11

$$(2.65)\quad |\mathcal{O}_h^r| \leq C\sqrt{\alpha\rho(h)}\,||u_h||_{h,1}\Big(\sum_{\Delta\in\mathcal{C}_h}\sum_{\Delta'\in\partial^+\Delta}\Big(\int_{\Delta'} r(X_r(x)-X_r(B))^2\,d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}$$

inégalité du même type pour $|\mathcal{O}_h^z|$

Démonstration

$$u_h(x)-u_h(B) = \frac{\partial u_h}{\partial r}(r-r_B) + \frac{\partial u_h}{\partial z}(z-z_B)$$

$$|u_h(x)-u_h(B)| \leq 4\,\rho_\Delta\,|\text{grad } u_h|$$

$$\Big|\int_{\Delta'} r^2(u_h(x)-u_h(B))(X_r(x)-X_r(B))\,\nu_{r,\Delta'}\,d\Gamma\Big| \leq$$

$$4\,\rho_\Delta\Big(\int_{\Delta'} r^3|\text{grad } u_h|^2\,d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Delta'} r|X_r(x)-X_r(B)|^2\,d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{\Delta'} r^3|\text{grad } u_h|^2\,d\Gamma = |\text{grad } u_h|^2\int_{\Delta'} r^3\,d\Gamma$$

A l'aide du lemme 2.6 on peut majorer $\int_{\Delta'} r^3\,d\Gamma$ et obtenir

$$\int_{\Delta'} r^3|\text{grad } u_h|^2\,d\Gamma \leq \frac{C}{\rho_\Delta'}\int_{\Delta} r^3|\text{grad } u_h|^2\,drdz$$

et

$$|\mathcal{O}_h^r| \leq C\sum_{\Delta\in\mathcal{C}_h}\sum_{\Delta'\in\partial^+\Delta}\frac{\rho_\Delta}{\sqrt{\rho_\Delta'}}\Big(\int_{\Delta} r^3|\text{grad } u_h|^2\,drdz\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Delta'} r|X_r(x)-X_r(B)|^2 d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}$$

d'où le résultat.

■

Lemme 2.12

$$(2.66)\qquad \sum_{\Delta\in\mathcal{C}_h}\ \sum_{\Delta'\in\partial^t\Delta}\int_{\Delta'} r(X_r(x)-X_r(B))^2\,d\Gamma \leqslant C|\varphi|^2_{-1}$$

inégalité du même type avec X_z

Démonstration

Posons $\sigma(x) = X_r(x)-X_r(B) \qquad x\in\Delta$

Alors $\sigma\in\mathcal{V}_2(\Delta)\cap L^2(\Delta)$ (cf ZUILY[18])

Donc $r^{\frac{1}{2}}\sigma\in\mathcal{V}_1(\Delta)\cap L^2_{1,\frac{1}{r}}(\Delta)$ et (cf. Proposition 6.4 chap.1)

$$\int_{\Delta'} r\,\sigma^2\,d\Gamma \leqslant C(\Delta)\Big(\int_\Delta r^2\Big(\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\Big)^2\Big)\,drdz + \int_\Delta \sigma^2\,drdz$$

$$\leqslant C(\Delta)\big(\|r\,D^2X\|^2_{L^2(\Delta)} + \|X\|^2_{H^1(\Delta)}\big)$$

où D^2X représente les dérivées secondes de X.

On peut vérifier en passant par un triangle de référence (cf la démonstration faite dans le cadre habituel dans TEMAM[15]) que l'on peut majorer $C(\Delta)$ par :

$$C(\Delta) \leqslant C(m,\Omega) \qquad \forall\,\Delta\in\mathcal{C}_h$$

Si bien que :

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{C}_h}\ \sum_{\Delta'\in\partial^t\Delta}\int_{\Delta'} r(X_r(x)-X_r(B))^2\,d\Gamma \leqslant C(m,\Omega)\big(\|r\,D^2X\|^2_{L^2(\Omega)}+\|X\|^2_{H}$$

$$\leqslant C(m,\Omega)\,|\varphi|^2_{-1}$$

(d'après ZUILY[18])

Proposition 2.7

On peut munir W_h du produit scalaire :

$$(2.67)\quad ((u_h, v_h))_{h\alpha} = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta r^\alpha \left(\frac{\partial u_h}{\partial r} \frac{\partial v_h}{\partial r} + \frac{\partial u_h}{\partial z} \frac{\partial v_h}{\partial z} \right) \, dr dz$$

(produit scalaire associé à la norme $|| \quad ||_{h,\alpha}$ définie en (2.47))

Ce produit scalaire définit sur W_h une topologie équivalente à celle définie par $[\![\quad]\!]_{h,\alpha}$. L'approximation de W_h ainsi définie est à nouveau stable et convergente.

2.5. Approximation des problèmes dégénérés du type (P)

Reprenons la formulation variationnelle des problèmes (P) définie au chapitre 1 :

$$\begin{cases} f \text{ étant donné dans } L^2_{\bar{r}^\alpha \, dr dz} & \text{trouver } u \in V_\alpha \text{ solution de} \\ \nu((u_\alpha, v))_\alpha = \int_\Omega f \, v \, dr dz & \forall \; v \in V_\alpha \end{cases}$$

Définissons maintenant le problème approché :

$$(2.69)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u_{h\alpha} \in W_{h\alpha} \text{ solution de :} \\ \nu((u_{h\alpha}, v_h))_\alpha = \int_\Omega f \, v_h \, dr dz & \forall \; v_h \in W_{h\alpha} \end{cases}$$

On peut alors déduire des résultats précédents les deux propositions suivantes :

Proposition 2.8

Le problème approché (2.69) admet une solution unique.

Proposition 2.9

La solution $u_{h\alpha}$ du problème approché (2.69) est telle que

$$p_{h,\alpha}\, u_{h\alpha} \to \bar{\omega}_\alpha\, u_\alpha \quad \text{dans} \quad F_\alpha \quad \text{fort quand} \quad \rho(h) \to 0$$

Cherchons maintenant dans le cas où u est suffisamment régulier une estimation de l'erreur obtenue.

Proposition 2.10

Si $u_\alpha \in C^2(\bar{\Omega})$ et si $\Omega = \Omega(h)$ on a l'estimation.

$$(2.70) \qquad \| p_{h\alpha}\, u_{h\alpha} - \bar{\omega}_\alpha\, u_\alpha \|_{F_\alpha} \leqslant C(u,\Omega,m)\,\rho(h)$$

Remarque : On constate que l'estimation d'erreur obtenue est du même type que dans le cas des espaces de Sobolev classiques.
La démonstration sera exposée dans un cadre plus général à la proposition 3.1

III - APPROXIMATION DE V ET DU PROBLEME DE STOKES EN SYMETRIE DE REVOLUTIO

3.1 Approximation de V.

Ω étant discrétisé comme précédemment on définit :

$$(3.1) \qquad F = F_3 \times F_1 = (H_3)^3 \times (H_1)^3$$

$$(3.2) \qquad \bar{\omega} : u = \begin{Bmatrix} u^s \\ u^z \end{Bmatrix} \in V \to \begin{Bmatrix} u^s \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial z} \\ u^z \\ \dfrac{\partial u^z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u^z}{\partial z} \end{Bmatrix} \in F$$

(3.3) $$W_h = W_{h3} \times W_{h1} \text{ et } ((u,v))_h = ((u^s,v^s))_{h3} + ((u^z,v^z))_{h1}$$

L'espace V_h est défini par :

(3.4) $$V_h = \left\{ u_h \in W_{h3} \times W_{h1} \;/ \int_\Delta r\left(2\, u_h^s + r\,\frac{\partial u_h^s}{\partial r} + \frac{\partial u_h^z}{\partial z}\right) = 0 \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{T}_h \right\}$$

(3.5) on munit V_h du produit scalaire $((\ , \ ))_h$ induit par W_h

Remarque : On peut voir que la condition de divergence discrète nulle introduite est la condition la plus faible que l'on puisse imposer.

Opérateur p_h

(3.6) $$p_h : u_h \in V_h \rightarrow (u_h^s,\ D_{rh}\, u_h^s,\ D_{zh}\, u_h^s,\ u_h^z,\ D_{rh}\, u_h^z,\ D_{zh}\, u_h^z) \in F$$

Les opérateurs p_h sont stables.

Opérateur r_h

Puisque $\mathcal{V}$ est dense dans V on peut se contenter de définir r_h pour les fonctions de $\mathcal{V}$.

Soit $u \in \mathcal{V}$. $r_h u$ est alors défini comme la fonction $u_h \in V_h$ vérifiant

(3.7) $$\begin{cases} u_h^s(B_{3,\Delta'}) = \dfrac{\int_{\Delta'} r^2 u^s \, d\Gamma}{\int_{\Delta'} r^2 \, d\Gamma} & \forall\, B_{3,\Delta'} \in u_{h3} \\[2ex] u_h^z(B_{1,\Delta'}) = \dfrac{\int_{\Delta'} r\, u^z \, d\Gamma}{\int_{\Delta'} r \, d\Gamma} & \forall\, B_{1,\Delta'} \in u_{h1} \end{cases}$$

Vérifions que si $u \in V$ alors $u_h \in V_h$.

$$\int_\Delta r\left(2u_h^s + r\frac{\partial u_h^s}{\partial r} + \frac{\partial u_h^z}{\partial z}\right) drdz = \int_\Delta r\ \widetilde{div}\ u_h\ drdz = \int_{\partial\Delta} \begin{pmatrix} r^2 & u_h^s \\ r & u_h^z \end{pmatrix} \vec{\nu}\ d\Gamma$$

$$= \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \int_{\Delta'} r^2\ u_h^s\ \nu_{r,\Delta'}\ d\Gamma + \int_{\Delta'} r\ u_h^z\ \nu_{z,\Delta'}\ d\Gamma$$

$$= \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \left(u_h^s(B_{3,\Delta'})\nu_{r,\Delta'} \int_{\Delta'} r^2\ d\Gamma + u_h^z(B_{1,\Delta'}) \int_{\Delta'} r\ d\Gamma \right)$$

$$= \sum_{\Delta' \in \partial^+\Delta} \left(\nu_{r,\Delta'} \int_{\Delta'} r^2\ u^s d\Gamma + \nu_{z,\Delta'} \int_{\Delta'} r\ u^z\ d\Gamma\right)$$

$$= \int_\Delta r\ \widetilde{div}\ u\ drdz = 0$$

■

Proposition 3.1

L'approximation de V ainsi définie est stable et convergente.

1°/ les opérateurs p_h sont stables (déjà vu)

2°/ consistance de l'approximation

Si $p_h, u_h, \to \varphi$ dans F alors $\varphi = \bar{\omega}\ u \qquad u \in V_3 \times V_1$

Il reste à montrer que $\widetilde{div}\ u = 0$

$p_h, u_h, \to \bar{\omega}\ u$ entraîne que

$$\widetilde{div_h}\ u_h \to \widetilde{div}\ u \quad \text{dans} \quad H_1 \quad \text{faible}$$

avec $\widetilde{div_h}\ u_h = 2\ u^s + r\ D_{rh}\ u_h^s + D_{zh}\ u_h^z$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta r\left(2\, u_h^s + r\,\frac{\partial u_h^s}{\partial r} + \frac{\partial u_h^z}{\partial z}\right)\varphi_h = 0$$

où φ_h est la fonction en escalier égale à la valeur moyenne (non pondérée) de φ sur Δ. D'autre part :

$$\sup_{x \in \Omega} |\varphi_h(x) - \varphi(x)| \leqslant C(\varphi)\, \rho(h)$$

Donc φ_h converge dans H_1 fort vers φ et

$$\int_\Omega r\ \widetilde{\operatorname{div}_h}\ u_h\ \varphi_h\ dr\,dz \to \int_\Omega r\ \widetilde{\operatorname{div}}\ u\ \varphi\ dr\,dz$$

Donc $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\int_\Omega r\ \widetilde{\operatorname{div}}\ u\ \varphi = 0$

D'où $\widetilde{\operatorname{div}}\ u = 0$.

■

3°/ Convergence de l'approximation

Montrons que $p_h\ r_h\ u \to \bar{\omega}\, u$ dans F

Soit v_h la fonction de W_h définie par :

$$\begin{cases} v_h^s\,(B_{3,\Delta'}) = u(B_{3,\Delta'}) & \forall\, B_{3,\Delta'} \in U_{h3} \\ v_h^z\,(B_{1,\Delta'}) = u(B_{1,\Delta'}) & \forall\, B_{1,\Delta'} \in U_{h1} \end{cases}$$

On a vu (proposition 2.2) que :

$$\left|\left| p_h\, v_h - \bar{\omega}\, u \right|\right|_F \leqslant C\ m\, \rho(h)$$

Il suffit donc de montrer que :

$$||p_h u_h - p_h v_h||_F = \left[\!\left[u_h - v_h \right]\!\right]_h \to 0 \quad \text{ou encore} \quad ||u_h - v_h||_h \to 0$$

quand $\rho(h) \to 0$

Soit $B \in \mathcal{U}_{h3}$ et $\begin{pmatrix} z_B \\ r_B \end{pmatrix}$ les coordonnées de B.

$$u^s(x) = v^s(B) + \frac{\partial u^s}{\partial r}(r - r_B) + \frac{\partial u^s}{\partial z}(z - z_B) + \sigma(x)$$

$$|\sigma(x)| \leqslant C \rho_\Delta^2 \qquad \forall\, x \in \Delta \text{ triangle tel que } B \in \partial \Delta .$$

Soit Δ' le côté dont B est le barycentre et intégrons sur Δ'

avec la mesure $r^2\, d\Gamma$:

$$u_h(B) = v_h(B) + \left(\int_{\Delta'} r^2\, \sigma\, d\Gamma\right)\left(\int_{\Delta'} r^2\, d\Gamma\right)^{-1}$$

Soit :

$$\varepsilon_h(B) = u_h(B) - v_h(B)$$

Alors

$$|\varepsilon_h(B)| \leqslant C \rho_\Delta^2$$

Soit $x \in \Delta$

$$u_h(x) - v_h(x) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_h(B_i)\, \mu_i(x)$$

où les μ_i sont les coordonnées barycentriques de x par rapport aux B_i

Donc :

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}(u_h - v_h)\right| \leqslant C\ \rho_\Delta^2 \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial \mu_i}{\partial r}\right| \leqslant C\ \frac{\rho_\Delta^2}{\rho'_\Delta}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}(u_h - v_h)\right| \leqslant C\ \rho_\Delta^2 \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial \mu_i}{\partial z}\right| \leqslant C\ \frac{\rho_\Delta^2}{\rho'_\Delta}$$

D'où l'on conclut:

$$\|u_h^s - v_h^s\|_{h,3} \leqslant C\ m\ \rho(h)$$

Démonstration analogue pour :

$$\|u_h^z - v_h^z\|_{h,1} \leqslant C\ m\ \rho(h)$$

■

Remarque- On peut voir que le choix des noeuds intervient ici de manière essentielle pour assurer la convergence de l'approximation alors que jusqu'à présent ce choix n'était nécessaire que pour assurer la consistance.

3.2. Approximation du problème de Stokes en symétrie de révolution.

Définition du problème approché

Posons :

$$a_h(u_h, v_h) = \nu((u_h, v_h))_h$$

$$(f, v_h)_h = (f_r, r\ v_h^s)_1 + (f_z, v_h^z)_1$$

On peut alors définir le problème approché :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ vérifiant} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_h \qquad \forall\, v_h \in V_h \end{cases}$$

La solution de (3.1) existe et est unique. De plus, quand $\rho(h) \to 0$

on a :

$$\begin{cases} u_h^s \to u^s \text{ dans } H_2 \text{ fort} \\ D_{rh}\, u_h^s \to \dfrac{\partial u^s}{\partial r} \text{ dans } H_3 \text{ fort} \\ D_{zh}\, u_h^s \to \dfrac{\partial u^s}{\partial z} \text{ dans } H_3 \text{ fort} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r\, u_h^s \to r\, u^s = u^r \text{ dans } L^2 \text{ fort} \\ D_{rh}(r\, u_h^s) \to \dfrac{\partial u^r}{\partial r} \text{ dans } H_2 \text{ fort} \\ D_{zh}(r\, u_h^s) \to \dfrac{\partial u^r}{\partial z} \text{ dans } H_1 \text{ fort} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_h^z \to u^z \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ D_{rh}\, u_h^z \to \dfrac{\partial u^z}{\partial r} \text{ dans } H_1 \text{ fort} \\ D_{zh}\, u_h^z \to \dfrac{\partial u^z}{\partial z} \text{ dans } H_1 \text{ fort} \end{cases}$$

Approximation de la pression

On a donc :

$$a_h(u_h, v_h) - (f, v_h)_h = 0 \qquad \forall\, v_h \in V_h = \left\{ v_h \in W_h \;/\; \int_\Delta r\, \widetilde{\operatorname{div}}\, v_h = 0 \right\}$$

Donc il existe des nombres π_h^Δ tels que :

$$a_h(u_h, v_h) - (f, v_h)_h = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \pi_h^\Delta \int_\Delta r \widetilde{\text{div}}\ v_h \qquad \forall\, v_h \in W_h$$

Soit $\pi_h = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \pi_h^\Delta X_h^\Delta$ où X_h^Δ est la fonction caractéristique du triangle Δ.

Alors :

$$a_h(u_h, v_h) - \int_\Omega r\, \pi_h\ \widetilde{\text{div}_h}\ v_h\, drdz = (f, v_h)_h \qquad \forall\, v_h \in W_h$$

■

Donnons maintenant une estimation de l'erreur obtenue quand u est assez régulier. Le résultat ci-dessous est essentiel car il caractérise l'ordre de convergence de l'approximation étudiée. On remarquera qu'il est identique à l'ordre de convergence obtenu pour l'approximation du problème de Stokes en coordonnées cartésiennes par la méthode des éléments finis non conformes.

Erreur entre u et u_h

Proposition 3.2

Si u^r et $u^z \in C^2(\bar{\Omega})$, si $p \in C^1(\bar{\Omega})$ et si $\Omega = \Omega(h)$ on a l'estimation :

$$(3.2) \qquad \|p_h u_h - \bar{\omega}\ u\|_F \leq C(u, p, \Omega, m)\rho(h)$$

Admettons provisoirement le :

lemme 3.1

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } u^r \text{ et } u^z \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ et si } p \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ alors} \\ a_h(u, v_h) = (f, v_h)_h + \ell_h(v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h \\ \text{avec :} \\ |\ell_h(v_h)| \leq C\, \rho(h) ||v_h||_h \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Alors

$$a_h(u_h - u, v_h) = -\ell_h(v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h$$

$$a_h(u_h - r_h u, v_h) = a_h(u - r_h u, v_h) - \ell_h(v_h)$$

Si on prend : $v_h = u_h - r_h u$ on obtient :

$$\nu ||u_h - r_h u||_h^2 \leq \nu\, ||u - r_h u||_h ||u_h - r_h u||_h + |\ell_h(u_h - r_h u)|$$

D'où, avec (3.3) on obtient :

$$||u_h - r_h u||_h \leq C\, \rho(h)$$

Démonstration du lemme (3.1)

u est solution de :

$$\begin{cases} -\nu \frac{\partial}{\partial r}(r^3 \frac{\partial u^s}{\partial r}) - \nu \frac{\partial}{\partial z}(r^3 \frac{\partial u^s}{\partial z}) + r^2 \frac{\partial p}{\partial r} = r^2 f_r \\ -\nu \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial u^z}{\partial r}) - \nu \frac{\partial}{\partial z}(r \frac{\partial u^z}{\partial z}) + r \frac{\partial p}{\partial z} = r f_z \\ 2 u^s + r \frac{\partial u^s}{\partial r} + \frac{\partial u^z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$-\nu \int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}(r^3 \frac{\partial u^s}{\partial r}) v_h^s + \frac{\partial}{\partial z}(r^3 \frac{\partial u^s}{\partial z}) v_h^s + \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial u^z}{\partial r}) v_h^z + \frac{\partial}{\partial z}(r \frac{\partial u^z}{\partial z}) v_h^z \; dr dz$$

$$+ \int_\Omega (r^2 \frac{\partial p}{\partial r} v_h^s + r \frac{dp}{\partial z} v_h^z) \, dr dz = \int_\Omega r^2 f_r v_h^s + r f_z v_h^z \; dr dz$$

Ou encore :

$$-\nu \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta \frac{\partial}{\partial r}(r^3 \frac{\partial u^s}{\partial r}) v_h^s + \frac{\partial}{\partial z}(r^3 \frac{\partial u^s}{\partial z}) v_h^s + \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial u^z}{\partial r}) v_h^z + \frac{\partial}{\partial z}(r \frac{\partial u^z}{\partial z}) v_h^z \; dr dz$$

$$+ \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta (r^2 \frac{\partial p}{\partial r} v_h^s + r \frac{\partial p}{\partial z} v_h^z) \, dr dz = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_\Delta r^2 f_r v_h^s + r f_z v_h^z \; dr dz$$

Appliquant la formule de Green sur chaque Δ on obtient :

$$a_h(u, v_h) - (f, v_h)_h - \ell_h(v_h) = 0$$

avec

$$\ell_h(v_h) = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial\Delta} \nu (r^3 \frac{\partial u^s}{\partial \vec{n}} v_h^s + r \frac{\partial u^z}{\partial \vec{n}} v_h^z) - p \begin{Bmatrix} r^2 v_h^\varepsilon \\ r v_h^z \end{Bmatrix} \cdot \vec{n} \; d\Gamma .$$

$\ell_h(v_h)$ apparaît alors comme la somme d'expression du type $\mathcal{O}^{x}_{h,\alpha}$

définies en (2.35) que l'on estime grâce au lemme 2.3 en prenant

successivement $\varphi = r\,\frac{\partial u^s}{\partial r}$; $r\,\frac{\partial u^s}{\partial z}$, $\frac{\partial u^z}{\partial r}$, $\frac{\partial u^z}{\partial z}$, p ce qui est possible avec les hypothèses et u_r, $u_z \in C^2(\bar{\Omega})$ et $p \in C^1(\bar{\Omega})$ ∎

Proposition 3.3

Si u^r et $u^z \in C^2(\bar{\Omega})$ si $p \in C^1(\bar{\Omega})$ et si $\Omega = \Omega(h)$ on a l'estimation :

(3.4) $\left|u^r - u^r_h\right|_o + \left|u^z - u^z_h\right|_o \leqslant C'(u,p,\Omega\ m)\rho(h)$

Cette estimation n'est sans doute pas optimale.

Elle découle directement des propositions 3.2 et 2.6 ∎

IV. DISCRETISATION DU PROBLEME EN $\begin{pmatrix} u^r \\ u^z \end{pmatrix}$ A L'AIDE D'ELEMENTS FINIS NON CONFORMES

Reprenons le problème variationnel défini au § 6 chap.1 :

$$(4.1)\quad \begin{cases} a(u^r, v^r) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,u^r)\frac{\partial}{\partial r}(r\,v^r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,u^r)\,\frac{\partial}{\partial z}(r\,v^r)\right] dr\,dz \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega r\,f^r\,v^r\,dr\,dz \qquad\qquad \forall\, v^r \in V_r \end{cases}$$

On cherche à approcher V_r par un espace V_h d'éléments finis non conformes. La condition aux limites $u^r = 0$ en $r = 0$ conduit à prendre $u^r_h(M) = 0$ en tous les noeuds M situés sur l'axe $r = 0$.

La forme bilinéaire approchant $a(u^r, v^r)$ sera alors du type :

$$a_h(u^r_h, v^r_h) = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Delta} \int_\Delta \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,u^r_h)\frac{\partial}{\partial r}(r\,v^r_h) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,u^r_h)\frac{\partial}{\partial z}(r\,v^r_h)\right] dr\,dz$$

On aura donc à calculer

$$\int_{\Delta} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\ u_h)\frac{\partial}{\partial r}(r\ v_h) + \frac{\partial}{\partial z}(r\ u_h)\frac{\partial}{\partial z}(r\ v_h)\right) drdz$$

ce qui va poser une difficulté lorsque Δ a un côté commun avec l'axe $r = 0$:

Soit Δ un tel triangle et $M_o \begin{pmatrix} z_o \\ o \end{pmatrix}$ le noeud de Δ situé sur l'axe $r = 0$

u_h^r et v_h^r s'écrivent alors :

$$u_h^r = \alpha\ r + \beta(z-z_o)$$

$$v_h^r = \gamma\ r + \delta\ (z-z_o)$$

$$\int_{\Delta} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\ u_h^r)\frac{\partial}{\partial r}(r\ v_h^r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\ u_h^r)\frac{\partial}{\partial z}(r\ v_h^r)\right] drdz$$

$$= \int_{\Delta} \frac{1}{r}\ (2\ \alpha r + \beta(z-z_o))(2\gamma\ r + \delta(z-z_o))\ drdz + \int_{\Delta} r\beta\ \delta\ drdz$$

$$= \int_{\Delta} 4\alpha\ \gamma\ r + 2\ (\alpha\ \delta + \gamma\beta)(z-z_o) + \frac{\delta\beta}{r}(z-z_o)^2\ drdz + \int_{\Delta} r\beta\ \delta\ drdz$$

qui ne sera fini que si β ou $\delta = 0$.

Il est donc impossible d'approcher le problème (4.1) par des éléments finis non conformes.

V. VALIDITE DU PROBLEME APPROCHE EN u^s et u^z

On a vu que les problèmes continus en $\begin{pmatrix} u^r \\ u^z \end{pmatrix}$ et en $\begin{pmatrix} u^s \\ u^z \end{pmatrix}$ étaient équivalents et que la résolution du problème en u^r par des éléments fini non conformes était impossible. Il y a lieu maintenant de s'assurer que le changement de fonction inconnue $u^s = \frac{u^r}{r}$ ne fait pas trop perdre d'informations sur le plan numérique. En effet, on peut craindre que l'apparition du poids r^3 conduise à la résolution, au niveau discret, d'un système linéaire mal conditionné.

On a donc testé la validité du schéma en u^s dans un cas simple :

on a pris $\Omega =]0,1[$ et on a essayé de résoudre :

$$(5.1)\quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r}(r^3 \frac{\partial u}{\partial r}) - r^2 f \qquad f \in L^2_{r\,drdz}(]0,1[) \\ \text{avec comme condition aux limites :} \\ u(1) = C \end{cases}$$

On a discrétisé ce problème en utilisant des éléments finis conformes de degré 1. Soit h la distance entre chaque noeud. Numérotons les noeuds de 1 à $N + 1$ en commençant par le noeud sur l'axe $r = 0$ et désignons par r_i : l'abcisse du noeud numéro i.

La matrice $[a_{ij}]$ du système linéaire à résoudre est tridiagonale et est définie par :

$$\left.\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{(r_i + h)^4 - (r_i - h)^4}{4h^2} \\ a_{i,i+1} &= \frac{r_i^4 - (r_i + h)^4}{4h^2} \\ a_{i,i-1} &= \frac{(r_i - h)^4 - r_i^4}{4h^2} \end{aligned}\right\} \quad 2 \leq i \leq N-1$$

$$a_{1,1} = \frac{h^2}{4} \qquad a_{1,2} = \frac{h^2}{4}$$

$$a_{N,N} = \frac{(r_N + h)^4 - (r_N - h)^4}{4h^2} \qquad a_{N,N-1} = \frac{(r_N - h)^4 - r_N^4}{4h^2}$$

Cette matrice est à diagonale fortement dominante et irréductible mais elle est mal conditionnée car, quand h est petit, les premières lignes comprennent des termes de valeur très petite par rapport à ceux des dernières. Ainsi on peut craindre une perte de précision de la méthode même pour $u_h^r = r\, u_h^s$.

On a donc résolu numériquement le problème (5.1) en s'intéressant à l'erreur $e_h = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} |u_h^r(M_i) - u^r(M_i)|}{\sum_{i=1}^{N} |u^r(M_i)|}$

Le système linéaire a été résolu par une méthode de sur-relaxation.

Le paramètre optimal calculé par l'intermédiaire de la plus grande valeur propre de la matrice de Gauss-Seidel (cf. par exemple BOURGAT-TREMOLIERES [3]) est égal à 1.88 pour un système à 60 points.

On a pris $f = -\frac{4}{5\sqrt{r}}$ et $u(1) = 1$ (d'où $u^s = \sqrt{r}$) et on a discrétisé $]0,1[$ en prenant successivement $h = \frac{1}{30}, \frac{1}{60}$ et $\frac{1}{90}$.

Le tableau ci-dessous donne les erreurs e_h obtenues :

	$h = 1/30$	$h = 1/60$	$h = 1/90$
e_h :	$.14 \times 10^{-3}$	$.5 \times 10^{-4}$	$.5 \times 10^{-4}$
nombre d'itérations nécessaires(*)	90	100	360

Sur u^s les résultats sont presque aussi bons sauf sur l'axe et à son voisinage immédiat.

(*) Le paramètre de relaxation a été pris égal à 1.88 dans tous les essais, il est optimal pour $h = 1/60$.

VI - CONCLUSIONS

La formulation variationnelle obtenue après le changement de fonction inconnue $u^s = u^r/_r$ peut être discrétisée par une méthode d'éléments finis non conformes à condition de définir les noeuds de manière satisfaisante comme expliqué au deuxième chapitre.

On obtient ainsi une méthode d'approximation variationnelle permettant la résolution des équations de Stokes en symétrie de révolution .

Cette méthode conserve tous les avantages de la méthode des éléments finis non conformes dans le cas des coordonnées cartésiennes, en particulier pour la facilité de mise en oeuvre et l'estimation d'erreur obtenue.

Le système linéaire que l'on est conduit à résoudre après discrétisation est bien conditionné et permet le traitement de cas où le second membre ou le gradient de pression sont singuliers ($\in L^2_{r\ drdz}$) sans précautions particulières.

REFERENCES

[1] BAOUENDI : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Thèse Paris 1967. Bull. Soc. Math. France 95(1967) p. 45 à 87.

[2] BAOUENDI-GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Rat. Mech. and Anal., Vol. 34, 5 (1969) p. 361 à 379.

[3] BOURGAT-TREMOLIERES : Analyse numérique du refroidissement d'un cylindre radioactif. Rapport LABORIA N° 17; Avril 1973.

[4] CROUZEIX : non publié mais exposé dans la communication de TEMAM et THOMASSET "Numerical solution of Navier-Stokes equations by a finite element method." Second International Symposium on finite element method in Flow Problems. Juin 1976. Santa Margharita. Italy.

[5] CROUZEIX-RAVIART : Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. Analyse Numérique, T.55, Université de Paris VI.

[6] DENY-LIONS : Les espaces du type de Beppo Levi. Annales de L'institut Fourier 5 (1955) p. 305-370.

[7] FORTIN : Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis. Thèse Université de Paris 1972.

[8] GRISVARD : Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids. Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Pise 1963

[9] HORMANDER : L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. Acta. Math., 113 (1965), p. 89-152.

[10] LIONS : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Montréal 1962.

[11] MOREL : Introduction de poids dans l'étude des problèmes aux limites. Annales de l'Institut Fourier 1962.

[12] NECAS : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson, Paris.

[13] SCHWARTZ : Théorie des distributions. Hermann. Paris.

[14] TEMAM : Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires. Thèse, Paris, 1967.

[15] TEMAM : On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations. Seconde Edition. Orsay, juin 1974.

[16] THOMASSET : Etude d'une méthode d'éléments finis de degré 5. Application aux problèmes de plaques et d'écoulement de fluides. Thèse de 3ème cycle. Orsay, 1974.

[17] THOMASSET : Application d'une méthode d'éléments finis d'ordre 1 à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes Rapport LABORIA N° 150. Décembre 1975.

[18] ZUILY : Etude de la régularité d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du 2ème ordre. Thèse de 3ème cycle. Paris.